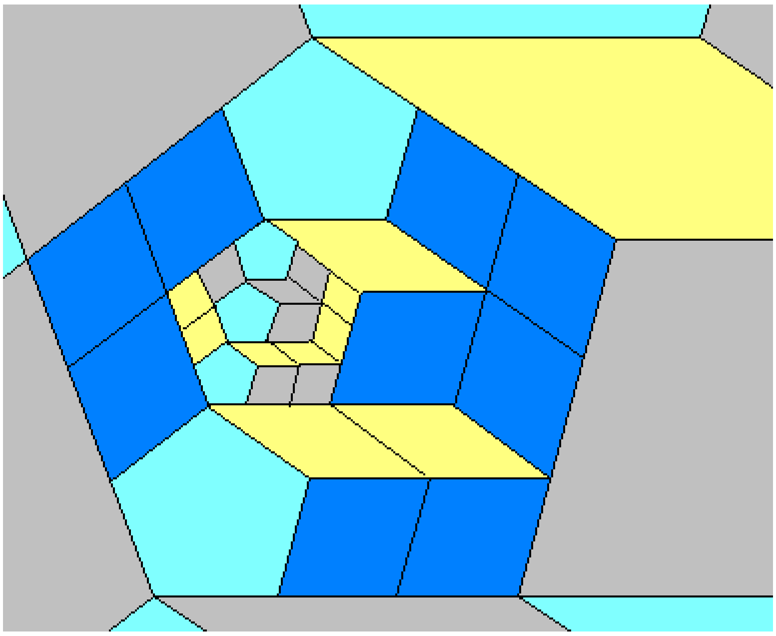
Франц Герман

Ромбическая мозаика правильных многоугольников

KIW – Gesellschaft e. V., Dresden, BRD,
E-Mail: kiw_dd@arcor.de hanzmannferr@mail.ru



"Насколько мне известно, новых типов мозаик больше никто не открывал,..."

Мартин Гарднер

Темой нашего исследования будут правильные многоугольники.

Известно, что любой правильный $\boldsymbol{n}$ - угольник с чётным числом сторон, т.е. квадрат, шестиугольник и т.д., можно замостить (т.е. выложить на его площади мозаику) $\boldsymbol{Z_ч}$ ромбами (см., например, книгу У. Болл, Г. С. М. Коксетер «Математические эссе и развлечения»), где

$$\boldsymbol{Z_ч} = \frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})^2-\mathbf{1}}{\mathbf{8}}. \qquad (1)$$

Например:

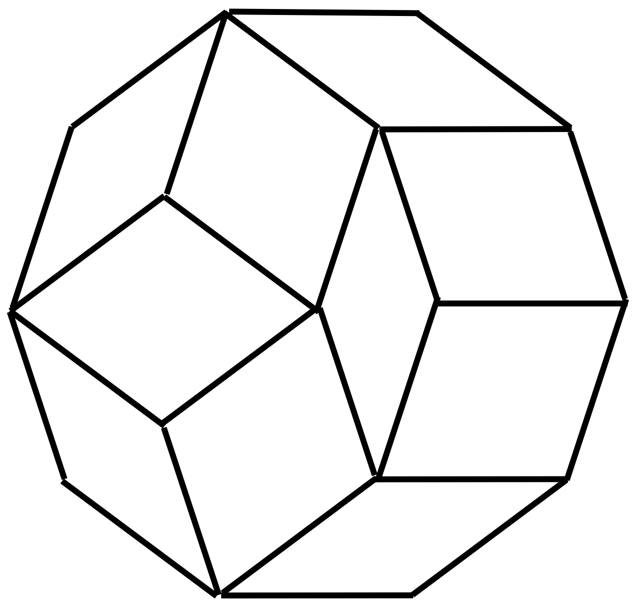


Рис. 1

Здесь $\boldsymbol{n} = \mathbf{10}$ и $\boldsymbol{Z_ч} = \frac{(\mathbf{10}-\mathbf{1})^2-\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$ т.е. **10** ромбов умещаются на площади правильного 10-угольника.

Заметим, что формула (1) даёт число ромбов в независимости от их видов. А мы видим, что на площади 10 - тиугольника разместились ромбы двух видов.

Познакомившись с этим результатом пытливый читатель может воскликнуть: "здесь какая-то несправедливость. Почему такая мозаика возможна только для чётных многоугольников? А как же быть с нечётными?" Такие или примерно такие же вопросы возникли и у автора, когда он увидел впервые формулу (1).

Именно это и послужило толчком более внимательно посмотреть на правильные многоугольники с нечётным числом сторон. Исследованием этих многоугольников мы теперь и займёмся.

Начнём с самого простейшего n - угольника, т.е. для n=3 (Рис. 2).

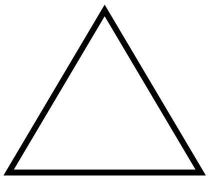


Рис. 2

По существу, это ни что иное как половинка ромба с углами 60 и 120° (Рис. 3).

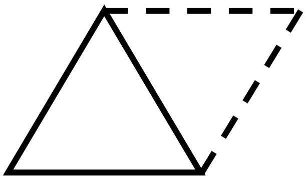


Рис. 3

Сразу возникает гипотеза: а может быть нечётные многоугольники можно замостить ромбами с точностью до половинки ромба? Рассмотрим правильный пятиугольник.

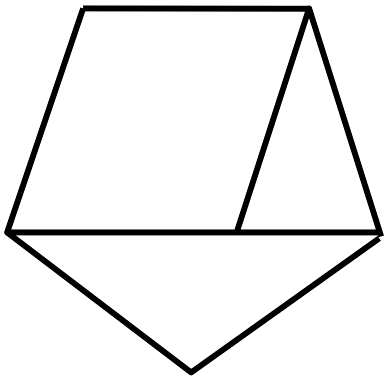


Рис. 4

Как видим, его можно замостить одним целым ромбом и двумя половинками.

Правильный семиугольник имеет мозаику из трёх ромбов и трёх половинок ромбов (Рис. 5).

Заметим, что пятиугольник имеет ромбы и половинки ромбов, принадлежащие к двум тиам ромбов. Семиугольник имеет уже три различных типа ромбов.

Попробуем найти формулу для общего числа ромбов и половинок ромбов для нечётных многоугольников. Мы помним, что формула (1) даёт общее число ромбов в независимости от типов ромбов.

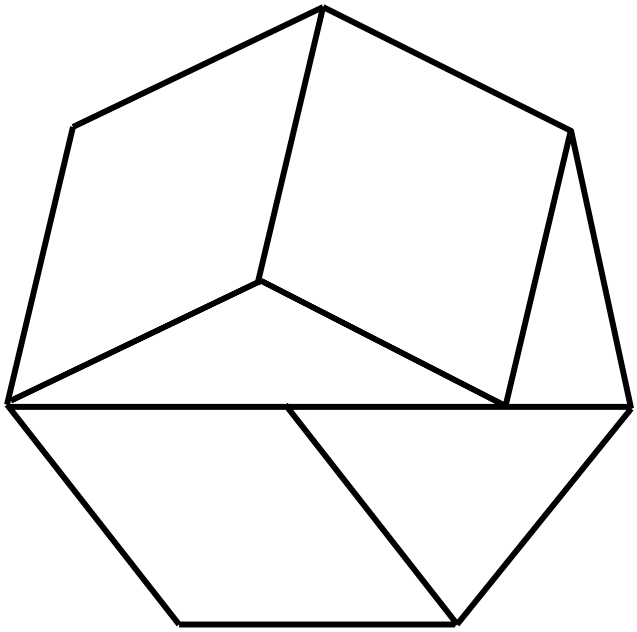


Рис. 5

Введём обозначения. Будем обозначать через r_i сумму ромбов типа i. Понятно, что для разных многоугольников r_i будут различны, т.е. например r_i для правильного треугольника не равна r_i для правильного пятиугольника и т.д. Общее число ромбов нечётного многоугольника обозначим через. Z_H, тогда, на основе прямых построений, будем иметь:

$$Z_H(3) = r_1 = \frac{1}{2};$$

$$Z_H(5) = r_1 + r_2 = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2;$$

$$Z_H(7) = r_1 + r_2 + r_3 = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2};$$

$$Z_H(9) = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8;$$

и т. д..

Т.е. напрашивается общая формула:

$$Z_H = \frac{(n-1)^2}{8} \tag{2}$$

Докажем, что это действительно так.

Пусть дан правильный n-угольник, где n - нечётное. Будем последовательно вписывать ромбы, как это показано на Рис. 6. Пусть рассматриваемая часть n-угольника состоит из K сторон.

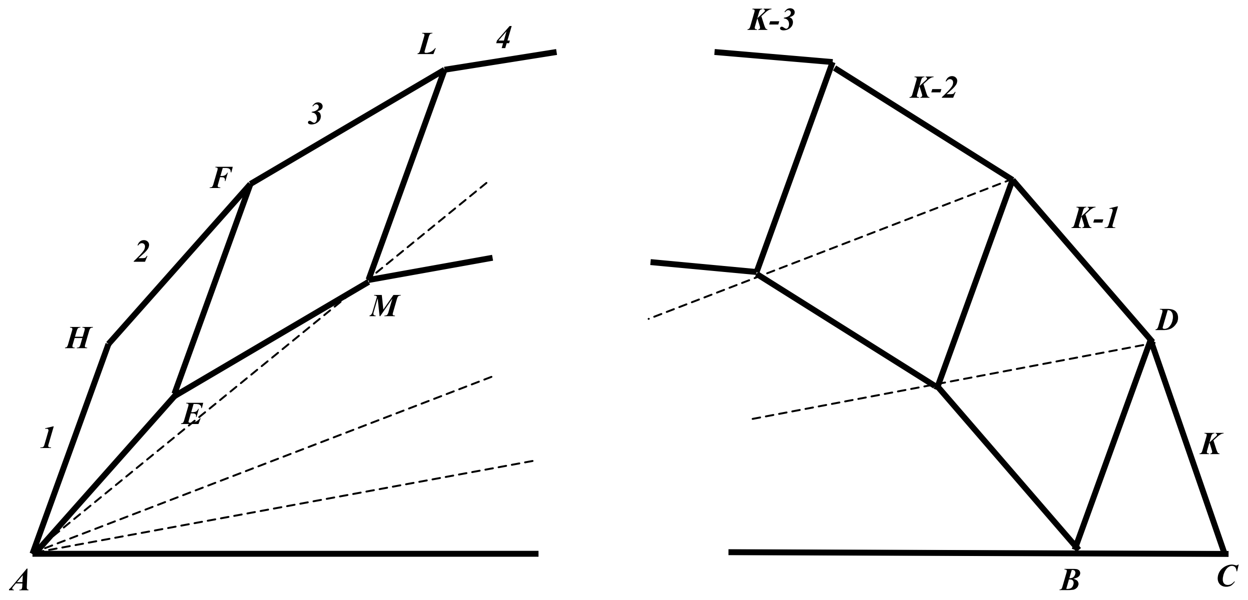


Рис.6

I

Рассмотрим первый вписанный ромб $AHFE$. Угол $\angle AHF = \alpha_1 = \pi - \frac{2\pi}{n}$, т.к. мы рассматриваем правильный n-угольник. Тогда смежный с ним угол этого ромба будет равен $\beta_1 = \frac{2\pi}{n}$. Соответственно будем обозначать для каждой стороны i ($i \geq 1$) нашего правильного n-угольника, прилегающие к ней смежные углы ромбов через α_{i-1} и β_{i-1}.

Определим углы ромба $EFLM$.

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \beta_1 = \pi - \frac{4\pi}{n}; \qquad \beta_2 = \frac{4\pi}{n}.$$

Углы следующего ромба:

$$\alpha_3 = \alpha_1 - \beta_2 = \pi - \frac{6\pi}{n}; \qquad \beta_3 = \frac{6\pi}{n},$$

и т.д.

Очевидно, что

$$\alpha_{K-2} = \pi - \frac{2(K-2)\pi}{n}; \qquad \beta_{K-2} = \frac{2(K-2)\pi}{n}.$$

Соединим точку C с точкой B, получим равнобедренный треугольник DBC.

Угол $\angle DBC = \frac{1}{2}\left(\pi - \left(\alpha_1 - \beta_{K-2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \pi + \frac{2\pi}{n} + \frac{2(K-2)\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n}(K-1)$.

Вписанный угол, в описанную окружность нашего n-угольника, стягивающий (K-1) сторону, как раз равен $\frac{\pi}{n}(K-1)$. Следовательно, угол $\angle DCB$ и есть такой угол. А из этого следует, что точки ***A, B*** и ***C*** лежат на одной прямой.

Следовательно, вписывая таим образом ромбы, мы получим (K-1) их различных видов. Причём, (K-2) целых ромба и одну половинку.

Всегда ли вписанные таким образом ромбы действительно будут различны?

Рассмотрим случай, когда

$$\beta_i = \alpha_{i+1}$$

Отсюда имеем:

$$\beta_i = \frac{2i\pi}{n}$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_1 - \beta_i = \pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{2i\pi}{n}$$

По предположению $\beta_i = \alpha_{i+1}$, следовательно

$$\pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{2i\pi}{n} = \frac{2i\pi}{n}.$$

Откуда находим, что $n = 2(2i+1)$. Но n нечётно. Получаем противоречие.

Случая же, когда $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ вообще существовать не может ни при каких n. Доказательство этого утверждения мы оставляем читателям.

Т.о. ситуация равных по виду ромбов может возникнуть только в случае, когда наш многоугольник имеет чётное число сторон. А т. к. мы рассматриваем нечётные многоугольники, то получаемые таким построением ромбы будут различны по видам.

Кстати, оставляем на самостоятельное рассмотрение читателям и более общие случаи $\alpha_i = \alpha_{i+m}$ и $\beta_i = \alpha_{i+m}$.

Теперь нам необходимо определить максимальное число сторон K, при котором возможно такое построение ромбов.

Рассмотрим фрагмент Рис. 6, дополнив его ещё одной стороной K+1 (Рис. 7).

Нас будет интересовать случай, когда отрезки ***DB*** и ***CT*** не будут параллельны, причём расположены они будут таким образом, что $\alpha_1 + \alpha_{K-1} < \pi$.

Из этого условия получаем

$$\alpha_{K-1} + \alpha_1 = \left(\pi - \frac{2\pi}{n} - \frac{2(K-2)\pi}{n}\right) + \left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{2\pi n - 4\pi - 2\pi(K-2)}{n} < \pi.$$

Откуда: $\boldsymbol{K} > \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}$.

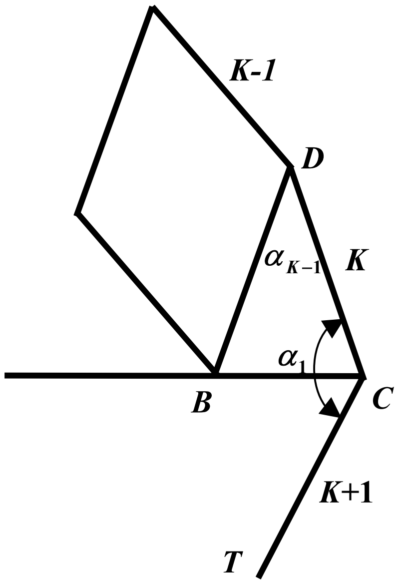


Рис. 7

$\boldsymbol{K}$ – это целое число. Поэтому наименьшее целое число, большее $\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}$ будет число $\frac{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. Т. е. $\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

Проведя в ***n***-угольнике максимально возможную диагональ, мы поделим его на две части, состоящие из $\frac{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ и $\frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ сторон многоугольника и общей диагонали.

Строя ромбы на сторонах, как это было описано выше, мы получим $\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \mathbf{1} = \frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ различных видов ромбов на большей части и ***n***-угольника и $\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \mathbf{1} = \frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ на его меньшей части. Причём очевидно, что ромбы на малой части и ***n***-угольника не расширяют множество видов, полученных построением на большей части ***n***-угольника. (Вид ромба определяет угол α_K).

Рассмотрим ломаную линию ***AEK*** ... ***B***. Понятно, что она состоит из $\frac{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \mathbf{2}$ отрезков, равных между собой и параллельных сторонам нашего многоугольника **2, 3, 4**, ... , ***K*-1** соответственно (Рис.6). Следовательно, на этой ломаной, как на части многоугольника, можно построить $\left(\frac{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\right) - \mathbf{1}$ ромбов различного вида.

Покажем получаемую цепь ромбов по видам. Дяя удобства и наглядности сведём все данные о видах ромбов в Таблицу 1.

Таблица 1

	r_1	r_2	r_3	r_4	...	$r_{\frac{n-1}{2}-2}$	$r_{\frac{n-1}{2}-1}$	$r_{\frac{n-1}{2}}$
$K=\frac{n+1}{2}$	1	1	1	1	...	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{n+1}{2}-2$	1	1	1	1	...	$\frac{1}{2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4	1	1	$\frac{1}{2}$		...			
2	$\frac{1}{2}$				...			

Данная таблица представляет виды вписанных ромбов в большую часть n-угольника, т.е. ограниченную $\frac{n+1}{2}$ сторонами.

Аналогичную таблицу представим и для второй части n-угольника, т.е. - с числом сторон $\frac{n-1}{2}$.

Таблица 2

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	...	$r_{\frac{n-3}{2}-2}$	$r_{\frac{n-3}{2}-1}$	$r_{\frac{n-3}{2}}$
$K=\frac{n-1}{2}$	1	1	1	1	1	...	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{n-1}{2}-2$	1	1	1	1	1	...	$\frac{1}{2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			⋮	⋮
5	1	1	1	$\frac{1}{2}$		...			
3	1	$\frac{1}{2}$				...			

Таблица 1 и Таблица 2 описывают мозаику n-угольников, для которых $K=\frac{n+1}{2}$ - чётное, т.е. это многоугольники с числом сторон **3, 7, 11, 15,** ...

Из этих таблиц видим, что в каждом виде имеется какое-то число целых ромбов и одна половинка.

Определим сколько ромбов в каждом виде.

Рассмотрим столбец $\boldsymbol{K}$ (первый столбец) Таблицы 1. Он представляет собой арифметическую прогрессию:

$$\mathbf{2,\ 4,\ 6,\ ...,\ \frac{\boldsymbol{n}+1}{2}}$$

Очевидно, что такая последовательность имеет $\mathbf{\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{n}+1}{2}\right)=\frac{\boldsymbol{n}+1}{4}}$ членов. Каждому члену, кроме первого, сопоставлен целый ромб (столбец $\boldsymbol{r}_1$ Таблицы 1). Поэтому всего ромбов вида $\boldsymbol{r}_1$ из таблицы 1 получаем:

$$\boldsymbol{r}_1=\mathbf{\frac{\boldsymbol{n}+1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\boldsymbol{n}-1}{4}}.$$

Не трудно получить и число ромбов по остальным видам.

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1-\mathbf{\frac{1}{2}=\frac{\boldsymbol{n}-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\boldsymbol{n}-3}{4}}$$

$$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_2-\mathbf{\frac{1}{2}=\frac{\boldsymbol{n}-3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\boldsymbol{n}-5}{4}}$$

и т.д.

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_{i-1}-\mathbf{\frac{1}{2}=\frac{\boldsymbol{n}-(2\boldsymbol{i}-1)}{4}}$$

Рассмотрим Таблицу 2. Первый столбец этой таблицы представляет собой опять же арифметическую прогрессию:

$$\mathbf{3,\ 5,\ 7,\ ...,\ \frac{\boldsymbol{n}-1}{2}}$$

Число членов такой прогрессии равно $\mathbf{\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{n}-1}{2}-1\right)=\frac{\boldsymbol{n}-3}{4}}$ Каждом члену прогрессии сопоставлен один ромб (см. столбец $\boldsymbol{r}_1$ Таблицы 2). Поэтому ромбов вида $\boldsymbol{r}_1$ в Таблице 2 имеется:

$$\boldsymbol{r}_1=\mathbf{\frac{\boldsymbol{n}-3}{4}}.$$

Также, как и в первом случае, находим число ромбов по остальным видам.

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1-\mathbf{\frac{1}{2}=\frac{\boldsymbol{n}-3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\boldsymbol{n}-5}{4}}$$

$$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_2-\mathbf{\frac{1}{2}=\frac{\boldsymbol{n}-5}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\boldsymbol{n}-7}{4}}$$

и т.д.

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_{i-1}-\mathbf{\frac{1}{2}=\frac{\boldsymbol{n}-(2\boldsymbol{i}+1)}{4}}$$

Сложив выражения r_i для первой и второй таблицы, получаем общую формулу для вычисления числа ромбов по видам:

$$r_i = \frac{n-(2i-1)}{4} + \frac{n-(2i+1)}{4} = \frac{n-2i}{2}. \qquad (3)$$

Теперь мы можем определить общее число ромбов в мозаике нашего n-угольника. Ранее мы говорили, что такой n-угольник имеет $\frac{n-1}{2}$ видов различных ромбов. Подставляя значения $i = \left\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ \frac{n-1}{2}\right\}$ в формулу (3), получаем такую последовательность:

$$\frac{n-2}{2};\quad \frac{n-4}{2};\quad \frac{n-6}{2};\quad ...\quad \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что это арифметическая прогрессия, т.к. разность членов a_{i+1} и a_i здесь постоянна. Напомним формулу для вычисления суммы арифметической прогрессии имеющей K членов:

$$S = \frac{a_1 + a_K}{2} K .$$

В нашем случае $a_1 = \frac{n-2}{2}$, $a_K = \frac{1}{2}$, $K = \frac{n-1}{2}$. Получаем:

$$\frac{\frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right) = \left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{(n-1)^2}{8}.$$

Как видим, мы получили формулу (2). Что и требовалось доказать.

Но это только часть доказательства. Как уже говорилось, всё это справедливо для n-угольников с числом сторон **3, 7, 11,..**.

Построим аналогичные таблицы (Таблица 3, Таблица 4) для n-угольников, у которых $K = \frac{n+1}{2}$ - нечётное. Это многоугольники с числом сторон **5, 9, 13,..**

Таблица 3

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	...	$r_{\frac{n-1}{2}-2}$	$r_{\frac{n-1}{2}-1}$	$r_{\frac{n-1}{2}}$
$K=\frac{n+1}{2}$	1	1	1	1	1	...	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{n+1}{2}-2$	1	1	1	1	1	...	$\frac{1}{2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
5	1	1	1	$\frac{1}{2}$		...			
3	1	$\frac{1}{2}$				...			

Таблица 4

	r_1	r_2	r_3	r_4	...	$r_{\frac{n-3}{2}-2}$	$r_{\frac{n-3}{2}-1}$	$r_{\frac{n-3}{2}}$
$K=\frac{n-1}{2}$	1	1	1	1	...	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{n-1}{2}-2$	1	1	1	1	...	$\frac{1}{2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4	1	1	$\frac{1}{2}$		...			
2	$\frac{1}{2}$				...			

Как и в предыдущем случае, находим формулу для вычисления r_i.
Рассмотрим последовательность чисел первого столбца Таблицы 3.

$$3,\ 5,\ 7,\ ...,\ \frac{n+1}{2}-2,\ \frac{n+1}{2}.$$

Число членов в этой последовательности равно: $\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)=\frac{n-1}{4}$. Каждому члену последовательности сопоставлен один ромб столбца r_i. Т. о.

$$r_1=\frac{n-1}{4}.$$

Как и в предыдущих случаях, число ромбов в каждом последующем виде на пол ромба меньше чем в предыдущем. Т. е. имеем:

$$r_2 = r_1 - \frac{1}{2} = \frac{n-3}{4};$$

$$r_3 = r_2 - \frac{1}{2} = \frac{n-5}{4};$$

$$r_4 = r_3 - \frac{1}{2} = \frac{n-7}{4}$$

и т.д.

$$r_i = r_{i-1} - \frac{1}{2} = \frac{n-(2i-1)}{4}.$$

Рассмотрим последовательность чисел столбца 1 Таблицы 4.

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ \frac{n-1}{2}.$$

Очевидно, что число членов этой последовательности равно $\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)$. Следовательно для r_1 Таблицы 4 получаем:

$$r_1 = \frac{n-3}{4};$$

$$r_2 = \frac{n-5}{4};$$

$$r_3 = \frac{n-7}{4};$$

и т. д.;

$$r_i = \frac{n-(2i+1)}{4}.$$

Как и в предыдущем случае, получаем общую формулу для суммы ромбов по видам:

$$r_i = \frac{n-2i}{2}$$

Т. к. максимальное число видов ромбов и в этом случае равно $\frac{\boldsymbol{n}-1}{2}$, то формула (2) будет верна и для $\boldsymbol{n}$-угольников с числом сторон **5, 9, 13, 17, ...** Т. е. формула (2) справедлива для любого $\boldsymbol{n}$-угольника с нечётным числом сторон.

Из формул (1) и (2) можно вывести общую формулу для числа ромбов в мозаике правильного $\boldsymbol{n}$-угольника.

$$Z = \frac{2n(n-2)+1-(-1)^n}{16} \tag{4}$$

Примеры:

$$n = 9, \qquad Z = \frac{2\cdot 9\cdot(9-2)+1-(-1)^9}{16} = \frac{2\cdot 9\cdot 7+2}{16} = 8.$$

$$r_1 = \frac{9-2}{2} = 3\frac{1}{2};$$

$$r_2 = \frac{9-4}{2} = 2\frac{1}{2};$$

$$r_3 = \frac{9-6}{2} = 1\frac{1}{2};$$

$$r_4 = \frac{1}{2};$$

$Z = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$. (Рис.8)

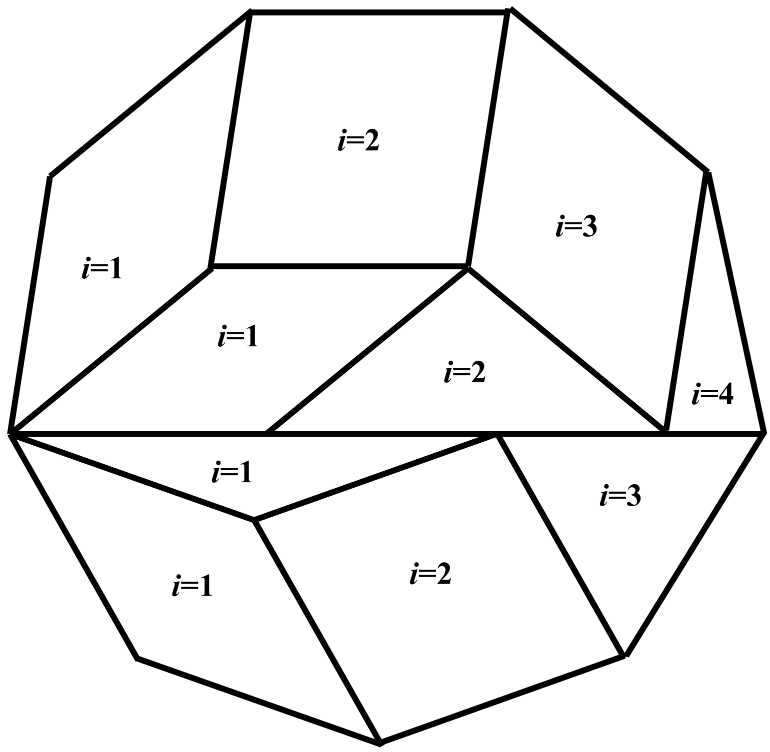


Рис. 8

$\boldsymbol{n}$**=11;** $\boldsymbol{Z = 12\frac{1}{2}}$; $\boldsymbol{r_1 = \frac{11-2}{2} = 4\frac{1}{2}}$; $\boldsymbol{r_2 = \frac{11-4}{2} = 3\frac{1}{2}}$; $\boldsymbol{r_3 = \frac{11-6}{2} = 2\frac{1}{2}}$;

$\boldsymbol{r_4 = \frac{11-8}{2} = 1\frac{1}{2}}$; $\boldsymbol{r_5 = \frac{1}{2}}$; $\boldsymbol{Z = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5}$. (Рис.9)

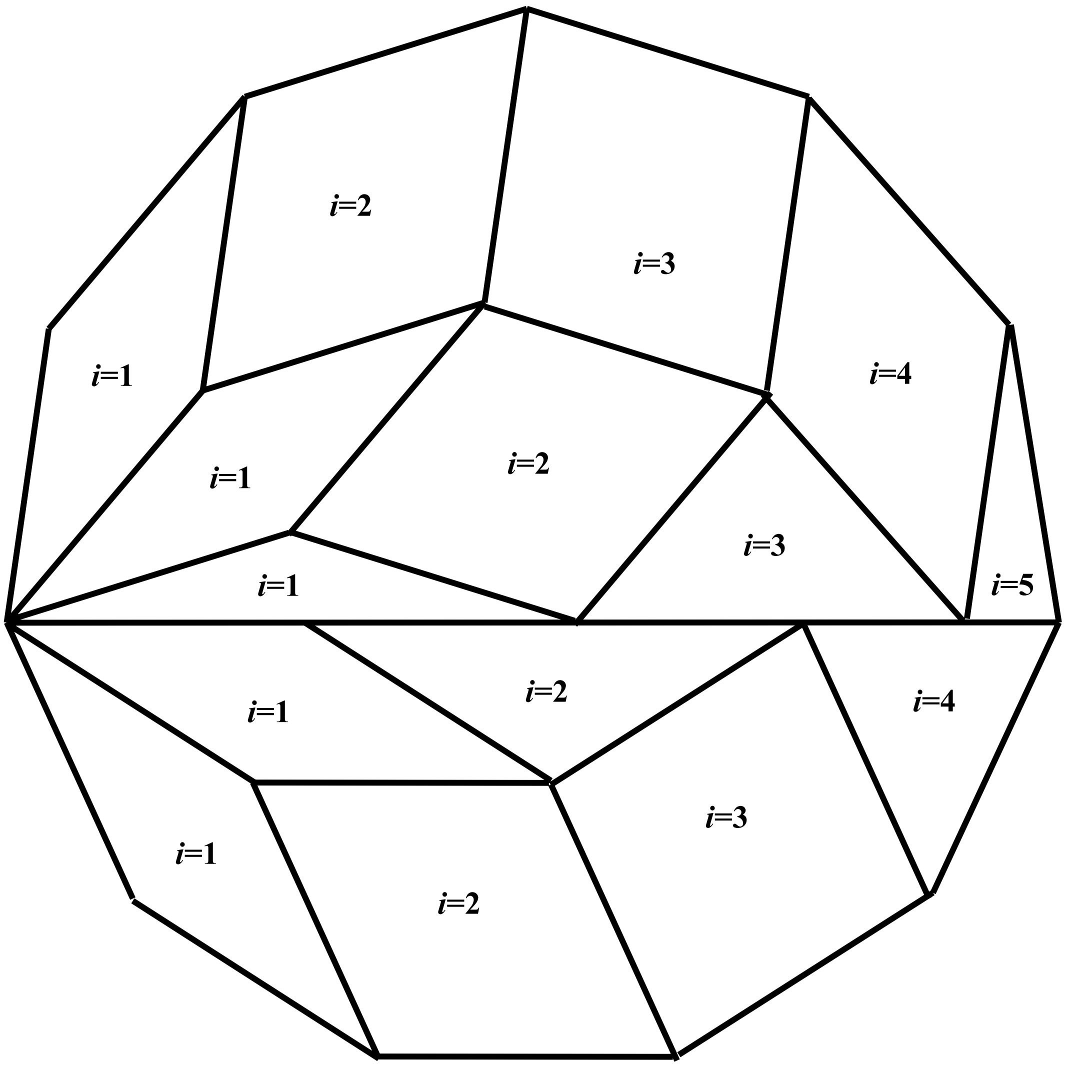


Рис. 9

Оказывается, что кроме показанной для $\boldsymbol{n}$-угольников существует и другая ромбическая мозаика. Исследованием этой новой мозаики мы сейчас и займёмся.

Разделим каждую сторону $\boldsymbol{n}$-угольника на $\boldsymbol{K}$ равных отрезка. Теперь, если из данного $\boldsymbol{n}$-угольника со стороной $\boldsymbol{a}$, определённым образом вырезать $\boldsymbol{K}$ правильных $\boldsymbol{n}$-угольников, то оставшуюся площадь можно замостить $\boldsymbol{N}$ ромбами со стороной $\boldsymbol{\frac{a}{K}}$.

Выведем формулу для $\boldsymbol{N}$.

Если стороны n-угольника разделить на K равных отрезка, а также и стороны ромбов, образующих его мозаику (которую мы рассматривали выше), то в каждом ромбе можно разместить K^2 подобных ему ромбов со стороной $\frac{a}{K}$. Т. е. будем иметь $K^2 Z$ маленьких ромбов. Но каждый маленький вырезанный n-угольник сам содержит Z ромбов со стороной $\frac{a}{K}$. Отсюда получаем:

$$N = K^2 Z - K \cdot Z = Z \cdot K \cdot (K-1) \tag{5}$$

Для n-угольников, с нечётным числом сторон, в этом случае, имеем такую формулу для суммы ромбов по видам:

$$q_i = K(K-1)\frac{n-2i}{2} \tag{6}$$

$$i = \left\{ 1,\ 2,\ ...,\ \frac{n-1}{2} \right\}.$$

Пример 1: $n = 5$: $K = 2$.

$$N = 2(2-1)\frac{(5-1)^2}{8} = 4;$$

$$i = \{1,\ 2\};$$

$$q_1 = 2(2-1)\frac{5-2}{2} = 3; \qquad q_2 = 2(2-1)\frac{5-4}{2} = 1.$$

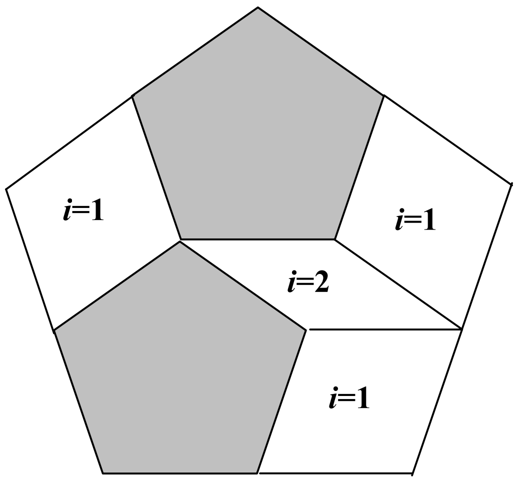


Рис. 10

Пример 2: $\boldsymbol{n = 5}$: $\boldsymbol{K = 3}$.

$$N = 3(3-1)\frac{(5-1)^2}{8} = 12;$$

$$i = \{1,\ 2\}$$

$$q_1 = 3(3-1)\frac{5-2}{2} = 9; \qquad q_2 = 3(3-1)\frac{5-4}{2} = 3.$$

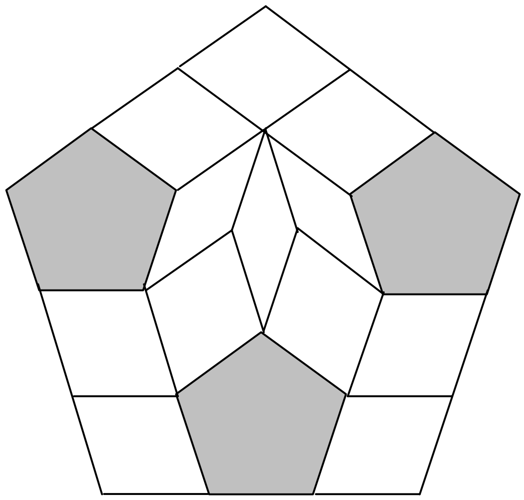


Рис. 11

Очевидно, что для $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{5}$ и любом $\boldsymbol{K}$ отношение $\frac{q_1}{q_2} = 3$. Это сразу видно из формулы (6).

Будем называть мозаику, как на Рис. 10, 11, мозаикой малых ромбов.

Можно дать более общее определение мозаик малых ромбов.

Если стороны данного $\boldsymbol{n}$-угольника разделить на $\boldsymbol{K}$ равных отрезков и вырезать из него определённым образом n_1, n_2, n_3, ... n_j правильных $\boldsymbol{n}$-угольников, стороны которых a_1, a_2, a_3, ... a_j кратны $\frac{a}{K}$ (т. е. длина каждой стороны a_j нацело делится на $\frac{a}{K}$) и $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_j = a$, то оставшуюся площадь можно замостить мозаикой малых ромбов (т. е. ромбами со стороной $\frac{a}{K}$). Здесь $\boldsymbol{a}$ – длина стороны исходного $\boldsymbol{n}$-угольника.

Вычислим число $\boldsymbol{N}$ малых ромбов, которые потребуются для этой мозаики.

Весь $\boldsymbol{n}$-угольник можно замостить $\boldsymbol{K^2 Z}$ малыми ромбами. Сторона каждого малого $\boldsymbol{n_j}$-угольника разделена на $\dfrac{\boldsymbol{a_j}}{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{K}}} = \dfrac{\boldsymbol{Ka_j}}{\boldsymbol{a}}$ отрезков. Поэтому его можно замостить $\left(\dfrac{\boldsymbol{Ka_j}}{\boldsymbol{a}}\right)^2 \boldsymbol{Z}$ малыми ромбами. Отсюда получаем общую формулу:

$$\boldsymbol{N = K^2 Z - Z\sum_{X=1}^{j}\left(\frac{Ka_X}{a}\right)^2 = K^2 Z\left(1 - \sum_{X=1}^{j}\left(\frac{a_X}{a}\right)^2\right)}. \qquad (7)$$

Здесь $\displaystyle\sum_{X=1}^{j}\left(\frac{a_X}{a}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_j}{a}\right)^2$.

Для $\boldsymbol{K = 5}$ будем иметь шесть принципиально различных типов мозаик, т. к.

$$1).\ \boldsymbol{a = \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{a}{5}};$$

В этом случае из нашего $\boldsymbol{n}$-угольника вырезается пять малых $\boldsymbol{n}$-угольников со стороной $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{5}}$. Подобные случаи мы уже рассмотрели и показали примеры на Рис. 10 и Рис. 11 (здесь $\boldsymbol{K = 2}$и $\boldsymbol{K = 3}$соответственно).

$$2).\ \boldsymbol{a = \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{2a}{5}};$$

В этом случае надо вырезать четыре малых $\boldsymbol{n}$-угольника. Три со стороной $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{5}}$ и один со стороной $\dfrac{\boldsymbol{2a}}{\boldsymbol{5}}$.

$$3).\ \boldsymbol{a = \frac{a}{5} + \frac{2a}{5} + \frac{2a}{5}};$$

$$4).\ \boldsymbol{a = \frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{3a}{5}};$$

$$5).\ \boldsymbol{a = \frac{2a}{5} + \frac{3a}{5}};$$

$$6).\ \boldsymbol{a = \frac{a}{5} + \frac{4a}{5}}.$$

Приведём примеры мозаик для $\boldsymbol{n}$**=3** и $\boldsymbol{K}$ **= 5.**

1). $\boldsymbol{Z} = \dfrac{(3-1)^2}{8} = \dfrac{1}{2}; \qquad \dfrac{a_X}{a} = \dfrac{1}{5}; \qquad j = 5; \qquad i = 1.$

$$N = 25\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right) = 10.$$

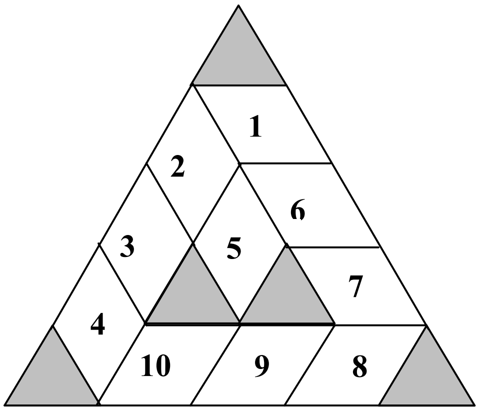


Рис. 12

Причём это не единственная мозаика при таких условиях. Пять маленьких треугольников можно поразному варьировать внутри большого треугольника.

2). $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{1}{5}; \; \dfrac{a_2}{a} = \dfrac{1}{5}; \; \dfrac{a_3}{a} = \dfrac{1}{5}; \; \dfrac{a_4}{a} = \dfrac{2}{5}; \; j = 4; \; N = 9..$

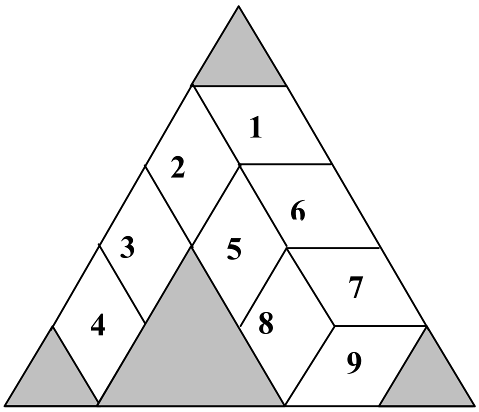


Рис. 13

3). $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{2}{5}; \; \dfrac{a_2}{a} = \dfrac{2}{5}; \; \dfrac{a_3}{a} = \dfrac{1}{5}; \qquad j = 3; \; N = 8.$

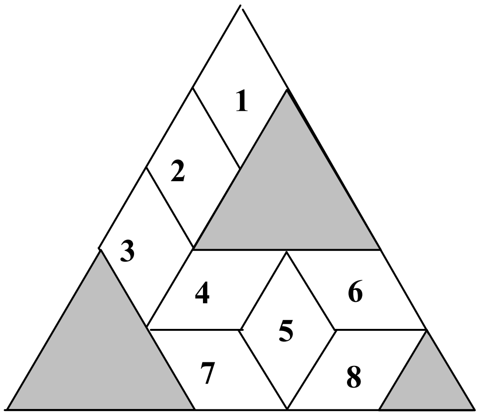


Рис. 14

4). $\dfrac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$; $\dfrac{\boldsymbol{a_2}}{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$; $\dfrac{\boldsymbol{a_3}}{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$; $\boldsymbol{j} = \mathbf{3}$; $\boldsymbol{N} = \mathbf{7}$.

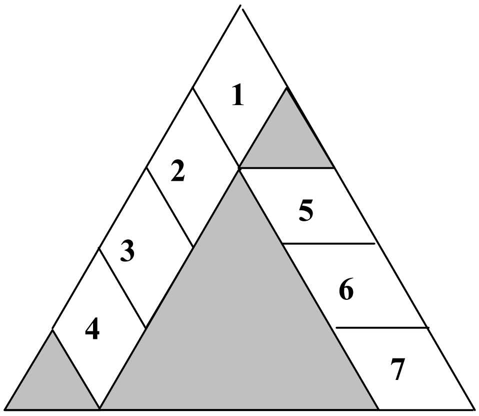


Рис. 15

5). $\dfrac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$; $\dfrac{\boldsymbol{a_2}}{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$; $\boldsymbol{j} = \mathbf{2}$; $\boldsymbol{N} = \mathbf{6}$.

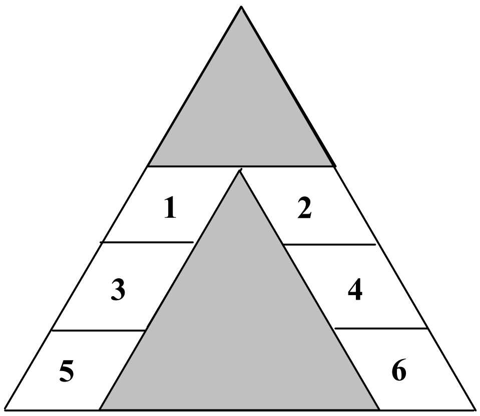


Рис. 16

6). $\frac{a_1}{a} = \frac{1}{5}$; $\frac{a_2}{a} = \frac{4}{5}$; $j = 2$; $N = 4$

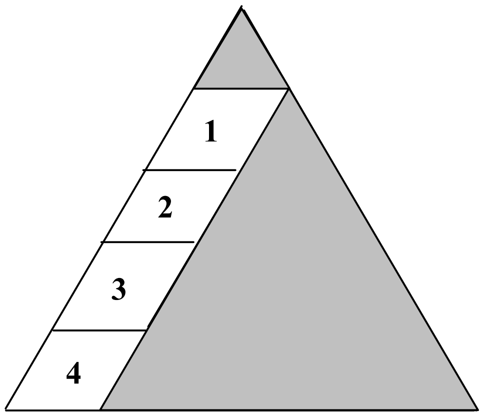
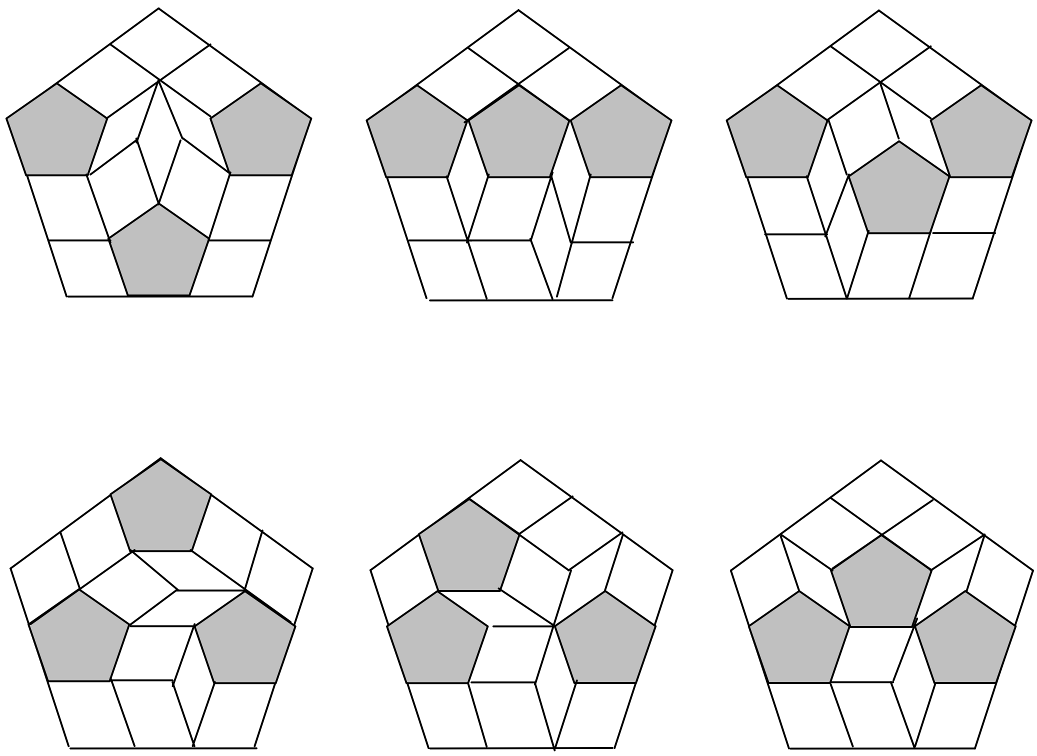


Рис. 17

А теперь приведём примеры мозаик правильного пятиугольника при таких условиях:

1). n=5, $K = 3$, $\frac{a_X}{a} = \frac{1}{3}$; $j = 3$; $N = 12$, $q_1 = 9$, $q_1 = 3$.

Мы будем считать мозаики различными, если различны расположения малых пятиугольников внутри большого относительно друг друга с точностью до поворотов и зеркальных отражений.



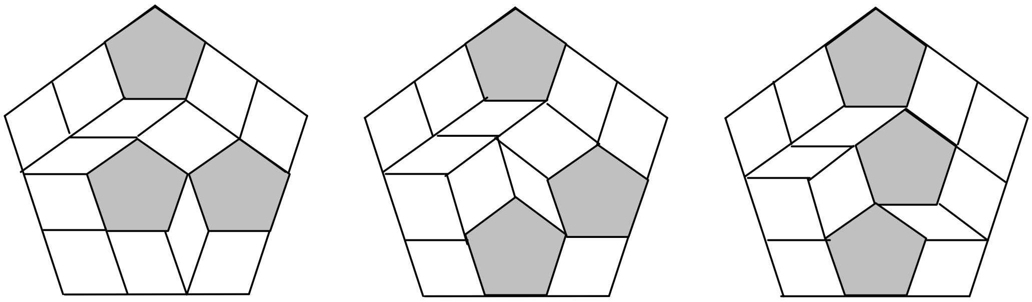


Рис. 18

2). $\boldsymbol{n}$=5, $\boldsymbol{K=3}$, $\dfrac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$; $\dfrac{\boldsymbol{a_2}}{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$; $\boldsymbol{j=2}$; $\boldsymbol{N=8}$, $\boldsymbol{q_1=6}$, $\boldsymbol{q_1=2}$.

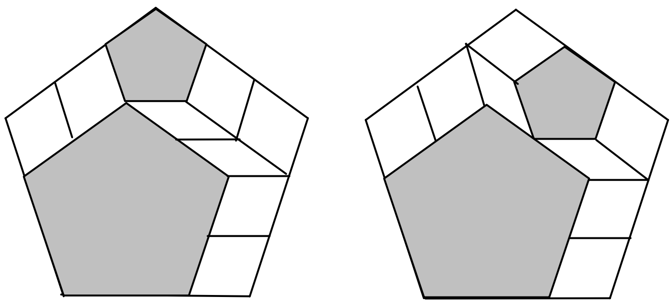


Рис. 19

Нам удалось найти 11 различных мозаик при таких условиях. Возможно, что их существует больше.

В заключение мы сформулируем несколько проблем для самостоятельных исследований заинтересованных читателей.

1). Исследовать ***n***-угольники с чётным числом сторон по видам ромбов (в нашей работе мы совсем не каксались этого вопроса).

2). Всегда ли справедливо соотношение: $\dfrac{\boldsymbol{r_i}}{\boldsymbol{r_k}}=\dfrac{\boldsymbol{q_i}}{\boldsymbol{q_k}}$?

3). Каковы критерии расположения малых ***n***-угольников внутри большого для успешной выкладки мозаик малых ромбов? Когда мы говорили о мозаике малых ромбов, мы всегда оговаривались: «вырезать определённым образом», т. е. ни при любом расположении малых ***n***-угольников удаётся выложить мозаику.

4). Сколькими различными способами при конкретных $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{K}$, $\dfrac{\boldsymbol{a}_X}{\boldsymbol{a}}$ можно замостить данный многоугольник с точностью до поворотов и зеркальных отражений? Может быть, существует формула для числа мозаик в зависимости от этих параметров?

5).**Гипотеза:** Если из правильного $\boldsymbol{n}$-угольника $(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{m})$ со стороной ***a,*** определённым образом вырезать ***k*** правильных ***m***-угольников со стороной ***a,*** то оставшуюся площадь можно замостить целыми ромбами со стороной ***a***. Причём, как выяснилось, для некоторых ***n***-угольников существуют качественно различные мозаики, т. е. при равных ***n, k, m*** число ромбов в мозаиках и виды ромбов могут быть различны.

Покажем несколько примеров.

Пример 1. ***n* = 10,** ***k*=2,** ***m*=5.**

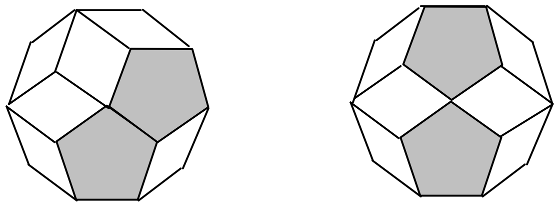
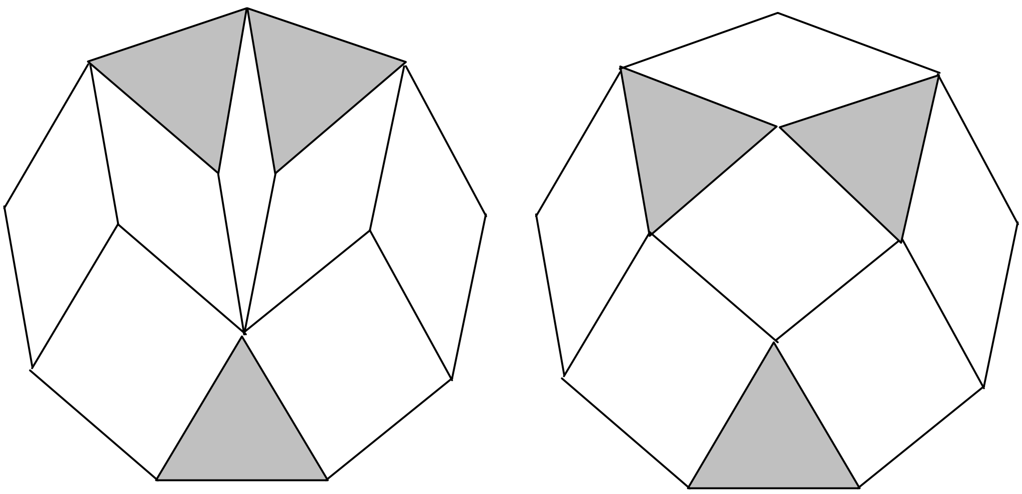


Рис. 20

Эти мозаики различны только взаимным расположением пятиугольников.

Пример 2. ***n* = 9,** ***k*=*m*=3.**



а) б)

Рис. 21

Как видим из Рис. 21, данные мозаики имеют качественное различие. Одна мозаика состоит из 7-ми ромбов, другая – из 6-ти ромбов. Причём мозаики различны и по виду ромбов. В мозаике, показанной на Рис. 21 б) отсутствует ромб с углом в 20°.

Пример 3. ***n* = 15,**   ***k*=3,**   ***m*=5.**

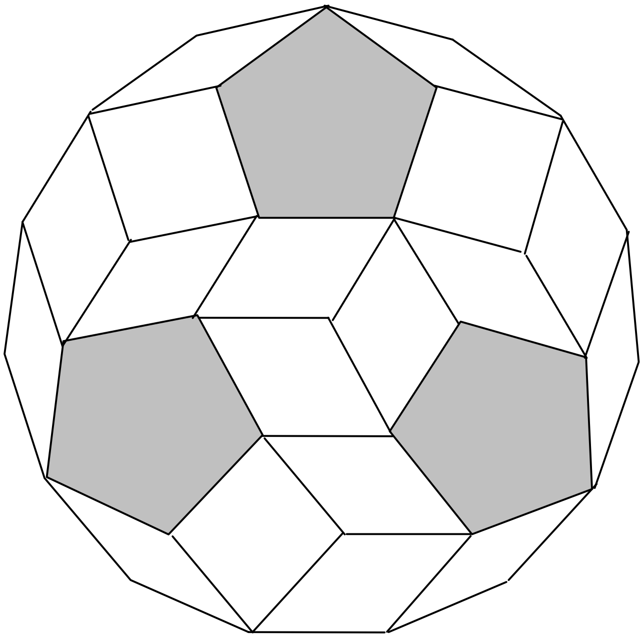


Рис. 22

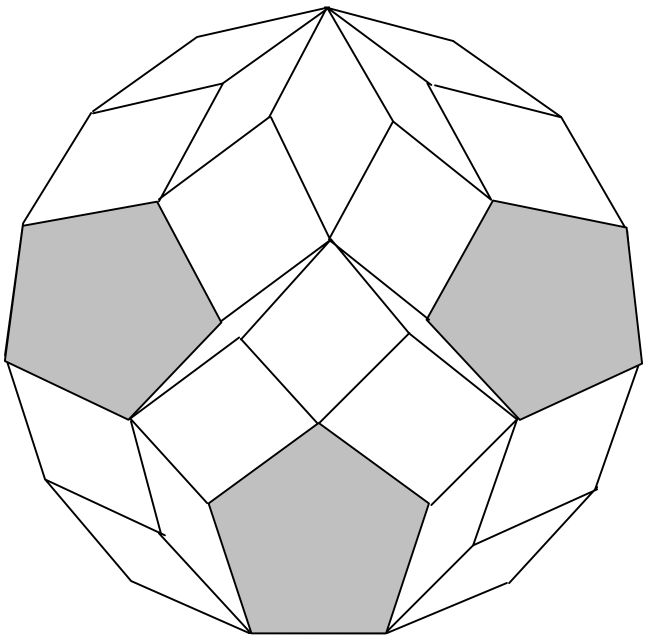


Рис. 23

На Рис. 22 и 23 показаны также качественно различные мозаики. В первом случае мозаика состоит из 18-ти ромбов и не имеет ромба с углом в 12°. Вторая же мозаика состоит из 20-ти ромбов.

Пример 4. ***n* = 15, *k*=5, *m*=3.**

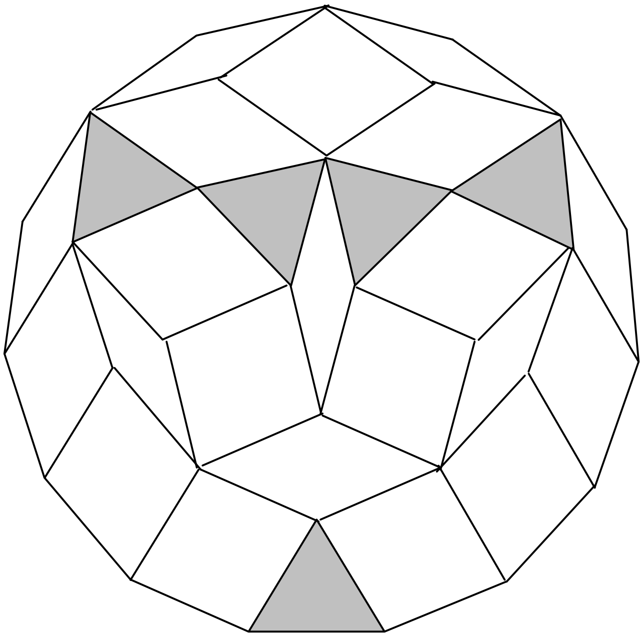


Рис. 24

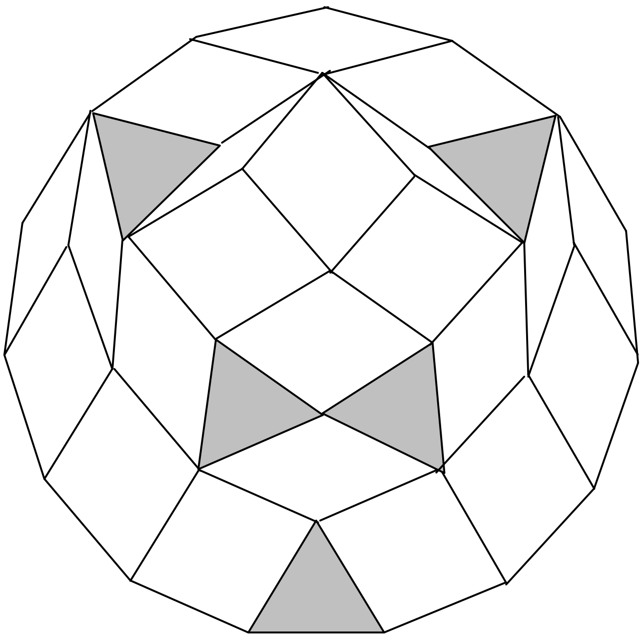


Рис. 25

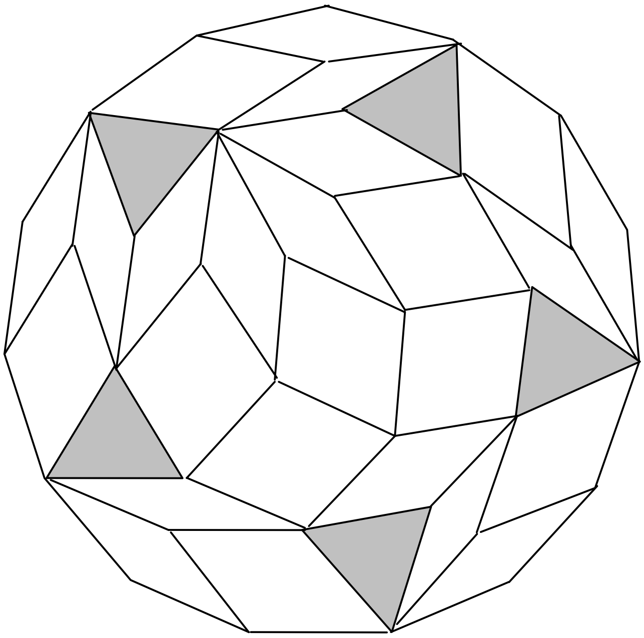


Рис. 26

На всех трёх рисунках 24, 25, 26 представлены качественно различные мозаики. Мозаика, показанная на Рис. 24 имеет 20 ромбов, но не имеет ромба с углом в 12°. Мозаика – Рис. 25 состоит из 22 ромбов и не имеет ромба с углом в 36°. А мозаика – Рис. 26 состоит из 25 ромбов, но не имеет ромба с углом 84°.

Мы думаем, что вопрос о количестве качественно различных мозаик, при конкретных ***n, k,*** и ***m*** может быть также темой отдельного исследования. А так же и вопрос: существуют ли качественно различные по видам ромбов мозаики среди многоугольников с чётным числом сторон или это привилегия только «нечётных» многоугольников.