

Франц Герман

KIW – Gesellschaft e. V., Dresden, BRD
E-Mail: kiw_dd@arcor.de hanzmannferr@mail.ru

К вопросу об экологической ёмкости региона

(Математическая модель. По материалам научно-технического семинара)

Абстрактно, чисто на интуитивном уровне экологическую ёмкость региона можно определить, как запас прочности (работоспособности) естественных природных сил, сопротивляющихся разрушительной для природы негативной силе деятельности человека. Этот запас прочности имеет критическую величину. Если деятельность человека превышает этот предел, то в регионе могут начаться необратимые процессы, негативно оказывающие действие на самого человека и экологию региона в целом.

Экологическую ёмкость региона будем обозначать через C (для всей Земли, как планеты) и считать, что пока деятельность человека негативно не проявлялась в природе $C = 1$ (величина безразмерная). Обозначения для региона k , соответственно, будет иметь вид $C^k = 1$. Формулу зависимости C от C^k регионов можно представить в таком виде:

$$C = 1 - a \cdot \frac{\sum_{k=1}^n C^k}{n} \quad (1)$$

Смысл коэффициента a будет объяснён ниже.

За основу математической модели экологической ёмкости планеты возьмём геометрический образ трёхслойной сферы (Рис.1).

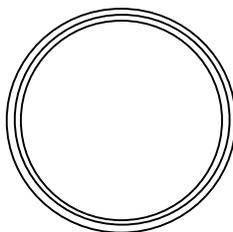


Рис. 1

Внешний слой – атмосфера ($A_0 = 23 \cdot 10^3$ [м]). Внутренний слой – кора Земного шара ($D_0 = 16 \cdot 10^3$ [м]). Разделяющая их сфера – поверхность Земли (почвенный слой, леса, горы степи, пустыни, реки, озёра, моря, океаны. Примерно $P_0 = 10 \cdot 10^3$ [м]). В общем для планеты, радиус которой $R_0 = 6,37 \cdot 10^6$ [м], размеры всех трёх слоёв пренебрежимо малы.

Будем считать, что пока экология человеком не нарушена наша сфера идеально гладкая, кривизна K которой постоянна. Кривизна сферы – это единственный параметр, характеризующий сферу, как геометрический объект.

$$K = \frac{1}{R_0^2}. \quad (2)$$

С точки зрения геометрии говорить о единицах измерения кривизны нет смысла. В нашем же случае, радиус Земли вполне физическая величина, поэтому кривизна K моделируемой сферы будет иметь единицу измерения $[\frac{1}{m^2}]$.

С введением этих обозначений, формула (1) принимает вид:

$$C = 1 - \frac{\sum_{k=1}^n V^k C^k}{4\pi \cdot n \cdot H_0 R_0^2}, \quad (3)$$

где V^k - объём региона, $H_0 = A_0 + D_0 + P_0$.

Мы строим математическую модель, поэтому, подводя итог вышесказанному, можем сформулировать такой закон в виде формулы:

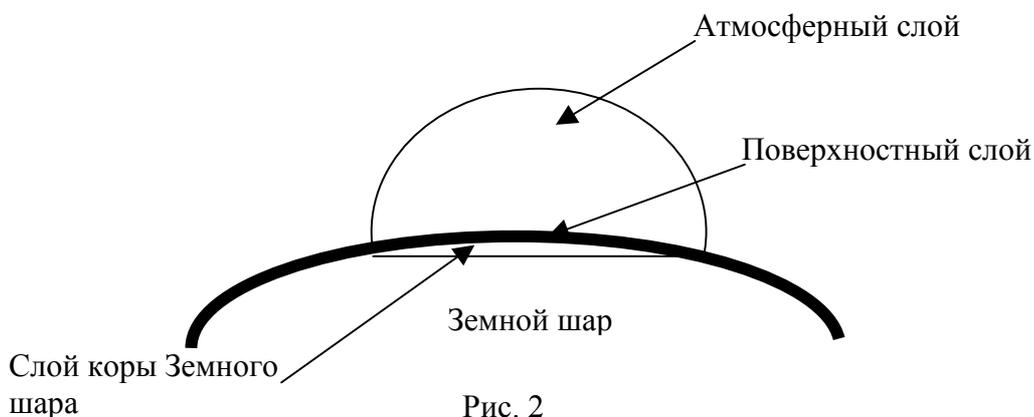
$$K = \xi_0 \cdot C. \quad (4)$$

Т. к. C – величина безразмерная, то коэффициент ξ_0 будет иметь размерность $[\frac{1}{m^2}]$. Т. о. наша сфера с одной стороны характеризуется кривизной поверхности, с другой стороны – экологической ёмкостью.

Для регионов, соответственно, будем иметь:

$$K^k = \xi_k \cdot C^k. \quad (5)$$

Проявление негативной деятельности человека в нашей модели будет характеризоваться изменением кривизны. Т. е. на сфере будут появляться бугорки (шишки), которые в свою очередь будут говорить об изменении экологической ёмкости конкретного региона. Для простоты первого представления удобнее всего такие шишки представлять в виде сегментов сфер, расположенных на поверхности Земли (моделируемой трёхслойной сферы (Рис. 2)).



Как показывает опыт человеческой деятельности XX века, одна из характерных её (деятельности) сторон проявляется в виде вырабатываемого тепла и, как следствие, сопровождается повышением температуры, что в конечном итоге приводит к изменению климата во всём регионе (ниже будет приведён пример региона Красноярского края).

Известно, что такие физические величины, как тепло Q [Дж] и температура T [К] объединяются понятием энтропии.

$$S = \frac{dQ}{dT}. \quad (6)$$

Таким образом (5) можем принять за определение энтропии S [$\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$] состояния экологической ёмкости региона.

По утверждению некоторых авторов (Волькенштейн М. В.) величиной, обратнопропорциональной энтропии является информация I [бит]. Можно привести простой пример. Рассмотрим открытую систему в виде сосуда с замороженной водой. Энтропия такой системы близка к нулю (имеется в виду движение молекул воды), а информация о системе (месторасположений молекул воды в кристалле льда) близка к 1 (т.е. к 100%, структура кристаллов льда хорошо изучена).

По мере нагрева сосуда, очевидно, что энтропия системы будет возрастать, а информация, соответственно, будет уменьшаться, в следствии всё увеличивающегося количества двигающихся молекул и увеличения их скорости.

Т. е. в нашем случае I [бит] – это информация о состоянии экологической ёмкости региона.

$$S = \xi_1 \frac{1}{I}. \quad (7)$$

Коэффициент ξ_1 в этом случае будет иметь размерность [$\frac{\text{Дж} \cdot \text{бит}}{\text{К}}$].

Из (2), (5) и (7) получаем такое соотношение:

$$C^k = \xi \frac{S^k I^k}{R_k^2}. \quad (8)$$

Соотношение (8) будем называть **уравнением состояния экологической ёмкости региона**. Здесь R_k - радиус сегмента (шишки) региона, а $\xi = \frac{1}{\xi_1 \xi_k}$.

В природе встречаются открытые системы напоминающие (по форме, но может быть и по развитию) наши шишки. Пример (по Волькенштейну).

Развитие и деление клетки живого организма можно описать на языке изменения энтропии ΔS . В этом случае различают изменение внутренней энтропии $\Delta_i S$, пропорциональное объёму V клетки и внешней $\Delta_e S$, пропорциональное поверхности F клетки. На языке математики такое развитие записывается так:

$$\Delta S = \Delta_i S - \Delta_e S = A \cdot V - B \cdot F.$$

При $\Delta S = 0$ клетка достигает своего критического размера $R = R_{\max}$. Т. е. при $R < R_{\max}$ происходит развитие клетки, при $R > R_{\max}$ происходит деление клетки.

Если проводить аналогию между развитием и делением клетки и моделью (геометрической) нашего региона, то в момент $\Delta S = 0$ нас ожидает информационный взрыв, т. к. помним, что $\Delta S \rightarrow \frac{1}{\Delta I}$. Т. е. своего рода произойдёт утеря контроля над информацией $\Delta I \rightarrow \infty$, а это может привести к любой катастрофе.

Теперь попробуем «оживить» с точки зрения математики уравнение (8), т.е. попытаемся сделать его пригодным для конкретных вычислений.

Для удобства перепишем его в следующем виде:

$$C^k = \delta_k S^k I^k \quad (9)$$

Мы рассматривали экологическую ёмкость региона в рамках трёх составляющих: экологическая ёмкость атмосферного слоя, экологическая ёмкость поверхностного слоя и экологическая ёмкость коркового слоя. Эти три составляющих можно рассматривать как координаты некоторого фазового (не геометрического) пространства C^k .

Соответственно правую часть уравнения (9) надо рассматривать, как фазовое пространство, являющееся прямым произведением своих подпространств: $X^k = S^k \times I^k$ (в рамках всё тех же послонных координат). Фазовые подпространства сопряжены. Формулой сопряжения является выражение (7). Распишем составляющие наших подпространств S^k :

$$\begin{aligned} S_1^k & - \text{энтропия по атмосфере,} \\ S_2^k & - \text{энтропия по поверхности,} \\ S_3^k & - \text{энтропия по коре.} \end{aligned}$$

Аналогично расписываются и составляющие подпространств I^k . Тогда с точки зрения математики мы получаем некоторый тензор $X_{ij} = S_i \times I_j$ (для простоты записи мы опускаем здесь индекс региона) фазового пространства X^k . Назовём построенный тензор **тензором меры хаоса**:

$$X_{ij} = S_i \times I_j = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда фазовое пространство C^k также необходимо представить в виде прямого произведения некоторых фазовых подпространств $W^k \times E^k$.

Из чего может складываться развитие региона и что может влиять на его экологическую ёмкость.

Фазовым координатам подпространства W^k может выступать такое соответствие (в зависимости от региона):

$$\begin{aligned} W_1^k & - \text{промышленность,} \\ W_2^k & - \text{энергетика,} \\ W_3^k & - \text{транспорт.} \end{aligned}$$

Тогда, фазовым координатам подпространства E^k можно сопоставить

$$\begin{aligned} E_1^k & - \text{экология атмосферы,} \\ E_2^k & - \text{экология поверхности,} \\ E_3^k & - \text{экология подповерхностного слоя (коры).} \end{aligned}$$

Получаем некий тензор:

$$C_{ij} = W_i \times E_j = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Назовём этот тензор тензором деформации экологической ёмкости региона.

Уравнение (9) можно представить в таком тензорном виде:

$$C_{ij} = \delta^k X_{ij}. \quad (10)$$

Экологическая ёмкость региона величина безразмерная. Необходимо ввести единицы измерения для W и E . Сделать это можно по-разному. Вероятно, самый простой путь для W - это единица измерения «рубль», т. е. [руб]. Тогда для E , как необходимость, получаем единицу измерения [1/руб], символизирующую затраты на решения экологических проблем. И получаем такую формулу сопряжения наших подпространств:

$$W = \xi_2 \frac{1}{E}, \quad (11)$$

здесь ξ_2 - безразмерный коэффициент пропорциональности.

Возможно, есть смысл рассматривать не сами величины уравнения (10), а их изменения, т. е. перейти к дифференциальным уравнениям. Например:

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial t} = \delta^k \frac{\partial X_{ij}}{\partial t}, \quad (12)$$

где изменения рассматриваются по времени t или

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_q} = \delta^k \frac{\partial X_{ij}}{\partial x_q}, \quad (13)$$

здесь x_q - координаты трёхмерного геометрического пространства, куда «вложены» наши фазовые пространства.

Нельзя исключать и возможность рассмотрения уравнений:

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_q} = \delta^k \frac{\partial X_{ij}}{\partial t} \quad (14)$$

и

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial t} = \delta^k \frac{\partial X_{ij}}{\partial x_q}. \quad (15)$$

Проблема анализа экологической ёмкости региона настолько сложна, что не исключена возможность, что надо рассматривать всю совокупность уравнений (12) – (15), каждое из которых, в свою очередь, представляет систему из 9-ти дифференциальных уравнений.

Рассмотрим примеры составляющих тензора деформаций экологической ёмкости региона.

$$C_{j1} = W_j \times E_1 \text{ (по атмосфере).}$$

Нарушения экологии от:

W_1 (промышленности) – выбросы в атмосферу от промышленных предприятий, воздушные испытания различного оружия,....

- W_2 (энергетики) – выбросы в атмосферу от энергетических предприятий, вредное влияние эл.-магнитных полей,...
- W_3 (транспорта) – воздушный транспорт, запуски космических ракет.

$$C_{j2} = W_j \times E_2 \text{ (по поверхности земли).}$$

Нарушения экологии от:

- W_1 (промышленности) – строительство заводов и фабрик, слив отходов в водоёмы и почву, вырубки леса, военные испытания,...
- W_2 (энергетики) – строительство различных ЛЭП, сетей, подстанций, ГЭС, прочих энергетических предприятий,...
- W_3 (транспорта) – наземный и железнодорожный транспорт, катастрофы с танкерами в морях и океанах,...

$$C_{j3} = W_j \times E_3 \text{ (по коре).}$$

Нарушения экологии от:

- W_1 (промышленности) – горнодобывающая промышленность, военные испытания,...
- W_2 (энергетики) – прокладка различных коммуникаций, добыча нефти и газа, захоронения ядерного топлива,...
- W_3 (транспорта) – строительство и эксплуатация метрополитенов, транспортных тоннелей,....

Возможно, для наиболее простого подхода к изучению динамики происходящих процессов, надо рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения не прибегая к понятиям фазового пространства. Тогда из уравнения (9) получаем такие дифференциальные уравнения:

$$\frac{dC^k}{dt} = \sigma^k \left(\frac{dS^k}{dt} I + S \frac{dI^k}{dt} \right), \text{ или } \frac{dC^k}{dx} = \sigma^k \left(\frac{dS^k}{dx} I + S \frac{dI^k}{dx} \right). \quad (16)$$

Всё это можно показать на примере Красноярского края.

Поколение людей 40 – 60-х годов прошлого столетия явно заметили глобальное изменение климата края. Климат стал более влажным и ветренным, склонным к резким изменениям погоды. Зимы потеплели. Енисей (вторая в мире река после Амазонки по полноводности речного бассейна) перестал замерзать в районе Красноярска. Исчезли многие породы рыб. Стали случаться пусть слабые (до 3-х баллов) землетрясения, чего отродясь не было в этом регионе. Огромные площади земельных пространств затоплены Красноярским морем. Порой выпадает снег всех цветов и оттенков радуги. Огромные площади вокруг алюминиевого комбината заражены так, что там даже трава не растёт. Регион перенасыщен промышленными и энергетическими комплексами. И т. д..

Всё это последствия деятельности человека.

Мы не останавливались здесь на конкретных методах вычисления кривизны различных поверхностей. Таких методов много. Это и методы дифференциальной геометрии и численные методы, метод Редже и другие...

Геометрия энергетики (ГЭ) (математическое эссе)

Построить математическое описание развития человеческой цивилизации не только трудно, но и практически невозможно. Эта задача может быть по силам только большому коллективу специалистов, круг знаний которых охватывал бы практически весь спектр научных направлений. Но нахождение решения такой задачи с каждым днём становится для человечества всё актуальней, так как не исключено, что цивилизация может оказаться в конфликтной ситуации с самой природой. И тем самым поставить под удар само существование цивилизации, а может быть и всего человечества.

Безусловно, одним из важных показателей уровня развития цивилизации может быть энергетика. В частности, количество производимой (потребляемой) электроэнергии. Ещё полтора века назад человечество грелось лишь у костров, печей, каминов или просто под солнцем.

На одном из «технических советов КИУ» была поставлена задача (Ю. Цоглин) попытаться подобрать математический аппарат для описания уровня современной энергетики. Для этой цели был предложен аппарат теории множеств.

Некое множество в виде сетки покрывает весь земной шар, а каждая клетка такого множества является подмножеством этого глобального множества и включает в себе ряд параметров, характеризующих состояние энергетики в данном регионе.

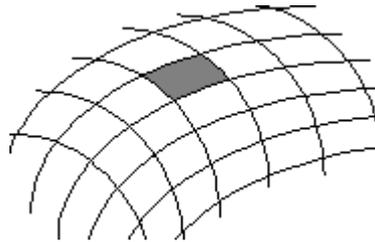


Рис. 1

Подводя итог сказанному о постановке такой задачи была предложена такая наглядная её интерпретация (Ю. Цоглин): пока не существовало энергетики как таковой земной шар был идеально гладким, как глобус, а с развитием энергетики на поверхности сферы (глобуса) стали появляться бугорки. Чем выше уровень развития энергетики данного региона, тем больше бугорок. Также было дано предложение (М. Липский), что возможно в данном случае использовать сферические координаты. И в завершение высказалось мнение (В. Рицлин), что здесь одной математикой не обойтись и необходимо использовать какие-то классические понятия вроде энтропии.

Не являясь специалистом ни в теории множеств, ни в области энергетики, мы решили упростить задачу и свести её к чисто геометрическому описанию фигуры, которую назвали сферой с шишками (кроме классической сферы в математике существуют сферы топологические, проективные, рогатые, сферы с ручками, сферы Римана и т. д.)

Вспоминая общую теорию относительности (ОТО), в которой Эйнштейн блестяще построил новую теорию гравитации, связав в одном уравнении геометрическую кривизну пространства-времени (функция метрического тензора) и материю (тензор энергии-импульса), мы решили предложить подобную аналогию без всякой претензии на новый взгляд в науке, а всего лишь ради наглядности.

Итак, ОТО	ГЭ
Пространство-время(П-В)	сфера с шишками (СШ – Земля с её историей)
Геометрия П-В	геометрия СШ
Геометрическая характеристика – кривизна K (и для ОТО и для ГЭ)	
Материя	энергия \mathcal{E} (от Солнца, от энергетики)

Тогда по аналогии с ОТО можем записать:

$$K = \xi \cdot \mathcal{E} \text{ или, } \xi \frac{\mathcal{E}}{K} = 1 \quad (1)$$

где ξ - некий коэффициент, увязывающий единицы измерения левой и правой части уравнения (1).

Для исследования СШ, как нам кажется, удобнее всего применить аппарат классической дифференциальной геометрии (КДГ) и рассматривать нашу фигуру именно в сферических координатах (Рис. 2). Для наглядности удобно глобус земного шара развернуть так, чтобы ось вращения Земли (направление на Полярную звезду) совпала с осью Z . Можно построить преобразование координат (широтно-меридианную сетку) на глобусе в сферические координаты на сфере. Но мы здесь этим заниматься не будем (мы объявили наше исследование математическим эссе, а значит никакой конкретики).

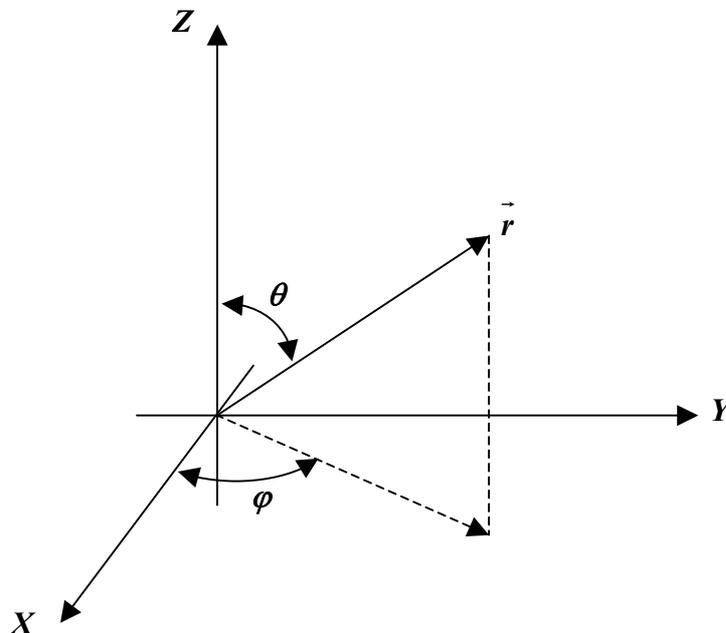


Рис. 2

Здесь $\vec{r}(\theta, \varphi)$ - радиус-вектор точки, исследуемой поверхности (в нашем случае – это СШ).

В доэнергетические времена уравнение (1) можно записать так:

$$K_0 = \xi \cdot \mathcal{E}_0 \quad (2)$$

Сфера ещё не имела шишек и кривизна её согласно (КДГ) была постоянна $K_0 = \frac{1}{R_0^2}$, где R_0 - радиус сферы (вполне конкретная величина радиуса земного шара), \mathcal{E}_0 - энергия, получаемая от Солнца в данной точке земного шара. Уравнение (2) можем переписать следующим образом (в дальнейшем мы используем это выражение):

$$\xi \cdot \mathcal{E}_0 \cdot R_0^2 = 1 \quad (3)$$

Векторное уравнение сферы имеет такой вид:

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = R_0 \left[\vec{e}_1(\varphi) \sin(\theta) + \vec{e}_z \cos(\theta) \right], \quad \text{где}$$

$$\vec{e}_1(\varphi) = \vec{e}_x \cos(\varphi) + \vec{e}_y \sin(\varphi), \quad \theta \left[\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right], \quad \varphi [0; 2\pi].$$

Сфера с шишками имеет поверхность, которую невозможно описать одним уравнением. Радиус-вектор такой поверхности будет меняться от точки к точке, т. е. R_0 всегда будет иметь некоторое приращение ΔR_0 .

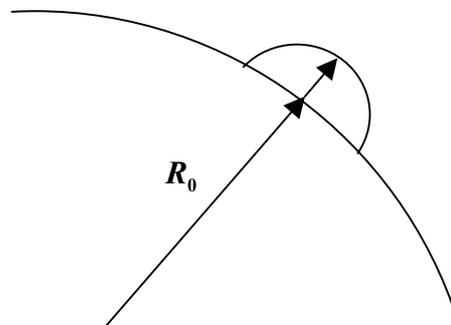


Рис. 3



Рис. 4

Глобус с шишками, как модель сферы с шишками

Упрощая ещё наше исследование будем считать, что «шишка» - суть сегмент сферы высотой $H = \Delta R_0$.

Исследовать сферу с шишками можно по точкам, ставя в соответствие каждой точке поверхности своё приращение ΔR_0 . В результате все данные могут быть сведены в табличный вид. Существуют численные методы и компьютерные программы, используя которые по табличным данным приближённо строится векторное уравнение поверхности. А методы КДГ позволяют вычислять кривизну этой поверхности.

Вспоминая замечание В. Риццина, напомним о существовании формулы, связывающей информацию I и энтропию S :

$$\eta \cdot I \cdot S = 1 \quad (4)$$

Объединяя уравнения (1) и (4) получим в общем виде:

$$K = \mu \frac{\partial}{I \cdot S} \quad (5)$$

Уравнение (5) назовём характеристическим уравнением состояния энергетики.

Отметим также, что исследование поверхностей может осуществляться методом «сечений плоскостями», проходящими через центр СШ (этот метод широко применяется в начертательной геометрии). Получая таким образом различные кривые в сечениях, наверно, возможно некоторым образом оценить влияние регионов друг на друга по характеру шишек.

Давая волю нашей математической фантазии отметим, что наши шишки представленные в виде сегментов сфер имеют и чисто геометрические характеристики: объём V и поверхность F .

$$V = \frac{1}{3} \pi H^2 (3R - H), \quad F = 2\pi R H$$

Т. к. мы предположили, что наши шишки характеризуют состояние энергетики данного региона, а значит и человеческую деятельность, интерпретируем формулы для V и F , как функции от многих параметров. В качестве таких параметров могут выступать данные о климатическом состоянии региона k (например среднегодовая температура и др.), плотность населения P , благосостояние B (например количество потребляемой эл. энергии человеком в час) и многие другие. Т. е.: $V = f_1(P, B, k, \dots)$, $F = f_2(P, B, k, \dots)$. Можно предположить например, что при $P > P_{MAX}$ в регионе может повыситься преступность или начаться эпидемии, а может быть начнётся гражданская война или революция. Можно ввести понятие кванта энергии в виде минимального потребления эл. Энергии h . Тогда по аналогии с законом Гейзенберга можно ввести закон неопределённости состояния общества в виде:

$$\Delta B \cdot \Delta S \geq h$$

Действительно, чем выше благосостояние человека тем менее он становится подвижным (всё, что угодно можно заказать по телефону, не слезая с дивана узнать последние новости и включив интернет получить любую информацию) и наоборот.

Возвращаясь к нашему геометрическому псевдоисследованию энергетики рассмотрим отношение $\frac{f_1}{f_2}$.

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{2}H - \frac{H^2}{6R_i}, \quad (6)$$

где R_i - сферический радиус шишки i . Напомним, что $H = \Delta R_0$ и $\xi R_i \mathcal{E}_i = \frac{1}{R_i}$ и тогда можем записать:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{2} \Delta R_0 \left(1 - \frac{\Delta R_0}{3} \xi R_i \mathcal{E}_i \right) \quad (7)$$

Помня, что энергия Солнца – это приходящая энергия, а энергетика порождает излучение Земли, т. е. энергию с противоположным знаком по отношению к излучению Солнца, и выражение $1 = \xi \cdot R_0^2 \mathcal{E}_0$, получаем ещё одно характеристическое уравнение состояния энергетики для «шишек» (регионов)

$$f = \frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{2} \xi \Delta R_0 \left(R_0^2 \mathcal{E}_0 - \frac{\Delta R_0}{3} R_i \mathcal{E}_i \right) \quad (8)$$

Заканчивая наше эссе можно отметить, что для исследования неправильных поверхностей, вроде нашей СШ, в инженерном деле применяется метод Редже. Исследуемая поверхность подвергается триангуляции (разбиению поверхности на треугольные сегменты). Затем выбирается интересующая нас точка поверхности и прилегающие к ней, как к вершине, треугольники разворачиваются на плоскости. По недостающему углу в такой развёртке можно судить о кривизне поверхности в данной точке.

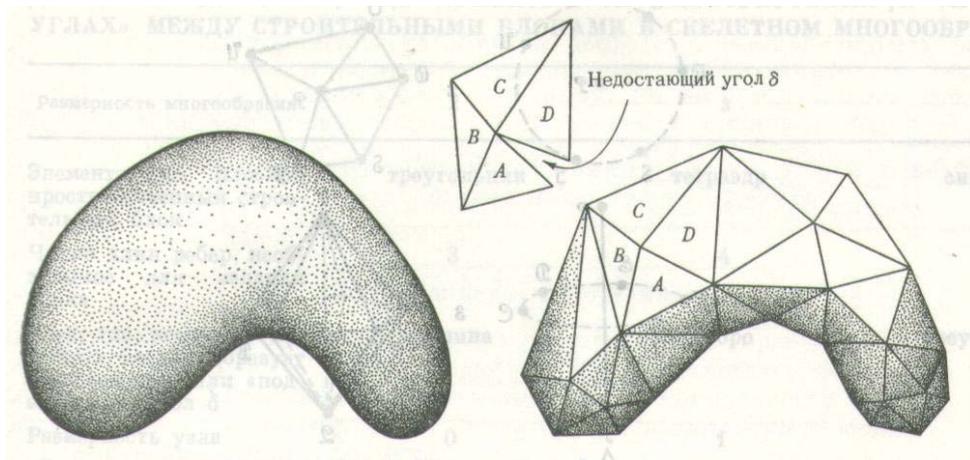


Рис. 5

С использованием этого метода уравнения Эйнштейна, например, принимают такой вид:

$$\delta_i \text{Ctg}(\omega^i) = 0$$