Франц Герман

Уравнение перетока для сообщающихся сосудов.

1.Общее уравнение

Рассмотрим классическую задачу гидравлики: переток жидкости в сообщающихся сосудах. Пусть имеем два одинаковых резервуара, соединённых трубопроводом. Один полностью заполненый, другой пустой. Для простоты будем считать, что резервуары расположены на одном уровне (Рис. 1) и имеют постоянную продольную (параллельно зеркалу жидкости) площадь сечения.

В абсолютном большинстве учебников по гидравлике рассматривается задача: за какое время в обоих резервуарах уровень жидкости установится одинаковым. Мы будем считать, что время перетока нам известно. Нас будет интересовать вид самого дифференциального уравнения, описывающего данный процесс.

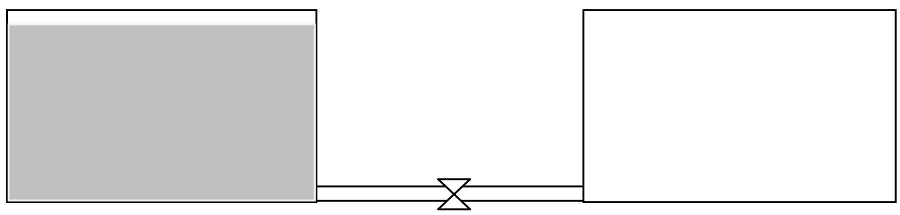


Рис. 1

Действующей силой данного процесса является сила тяжести, поэтому по аналогии с процессом свободного падения материальной точки можем записать:

$$\frac{d^2 H}{dt^2} = -kg\,, \qquad (1)$$

здесь H – напор (уровень жидкости), g – ускорение свободного падения, t – время, k – неизвестный пока коэффициент. Знак минус в уравнении стоит потому, что процесс является равнозамедленным, в отличие от равноускоренного процесса свободного падения ($\frac{d^2 S}{dt^2} = g$).

Решение уравнения (1) имеет вид:

$$H = -k\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2\,, \qquad (2)$$

здесь C_1 и C_2 - константы интегрирования, определяемые из начальных и граничных условий.

Рассмотрим данный процесс относительно полного резервуара, из которого жидкость вытекает. При $t = 0$ $H = H_0$. Отсюда получаем: $C_2 = H_0$. При $t = T$ (время процесса, за которое происходит выравнивание уровней в резервуарах) $H = \frac{H_0}{2}$. Т. е. можем записать:

$$\frac{H_0}{2} = -\frac{1}{2}kgT^2 + C_1T + H_0.$$

Откуда получаем: $C_1 = \frac{kgT^2 - H_0}{2T}$.

В точке $t = T$ должен быть экстремум (минимум, т. к. процесс останавливается, Рис. 2)

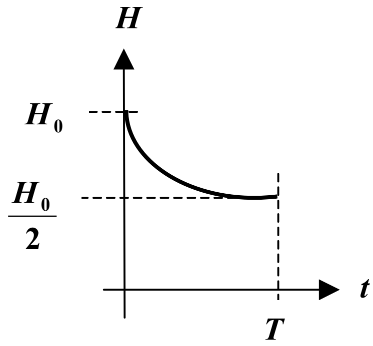


Рис. 2

Т. е. можем записать:

$$\dot{H} = -kgt + C_1 = 0 \tag{3}$$

Откуда, при $t = T$, получаем: $C_1 = kgT$. Приравнивая два выражения для C_1, получаем такое равенство: $\frac{kgT^2 - H_0}{2T} = kgT$. Из этого равенства находим выражение для константы k:

$$k = -\frac{H_0}{gT^2} \tag{4}$$

И с учётом (4): $C_1 = -\frac{H_0}{T}$.

Подставляя найденные константы в (2), получаем уравнение, показывающее зависимость напора (уровня) от времени для первого резервуара.

$$H = \frac{H_0}{2T^2}\left(t^2 - 2Tt + 2T^2\right) \tag{5}$$

Рассмотрим данный процесс относительно второго резервуара, в который жидкость втекает. При $t = 0$ $H = 0$. Отсюда получаем: $C_2 = 0$. При $t = T$ (время процесса, за которое происходит выравнивание уровней в резервуарах) $H = \frac{H_0}{2}$. Т. е. можем записать: $\frac{H_0}{2} = -\frac{kgT^2}{2} + C_1 T$.

В точке $t = T$ также должен быть экстремум (максимум, Рис. 3)

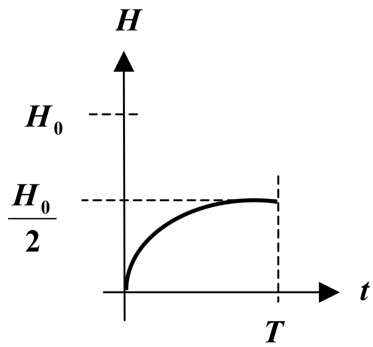


Рис. 3

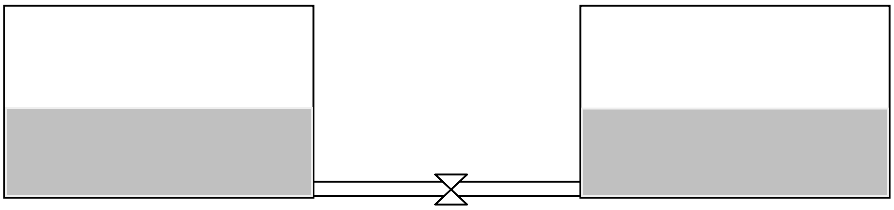


Рис. 4

Рассуждая аналогично предыдущему, получаем:

$$k = \frac{H_0}{gT^2} \tag{6}$$

и $C_1 = \frac{H_0}{T}$.

Подставляя найденные константы в (2), получаем уравнение, показывающее зависимость напора (уровня) от времени для второго резервуара (приток жидкости).

$$H = -\frac{H_0}{2T^2} t(t - 2T) \tag{7}$$

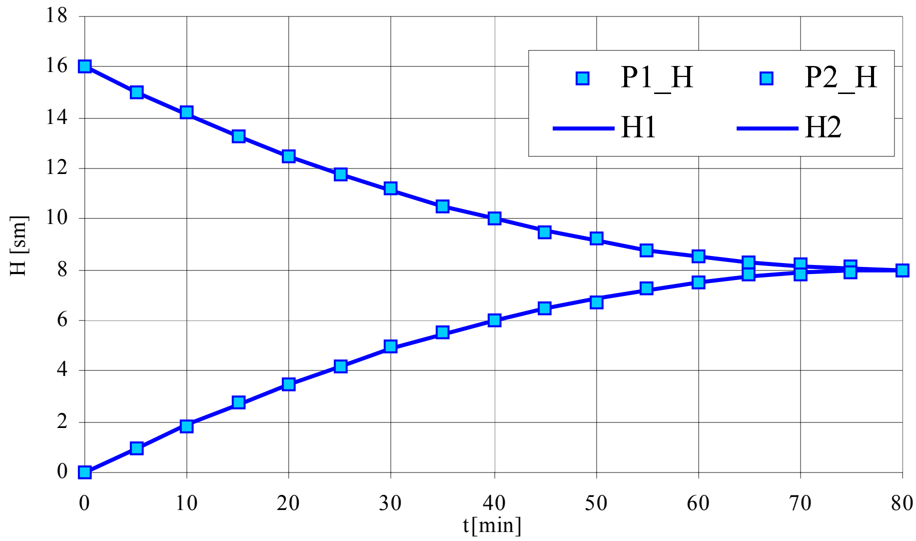
С учётом найденных констант, уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{d^2 H}{dt^2} = \pm \frac{H_0}{T^2} \tag{8}$$

Если перед правой частью уравнения (8) стоит плюс, то мы имеем уравнение, описывающее процесс убывания уровня жидкости для первого резервуара. Если –

стоит минус, то получаем описание симметричного процесса – притока жидкости во второй резервуар.

На Рис. 5 показаны диаграммы практического эксперимента перетока воды из резервуара Р1 в резервуар Р2 (данные эксперимента на диаграмме показаны точками, а теоретические кривые , построенные по формулам (5) и (7), показаны сплошной линией.)



2. Экспоненциальный вид уравнения

Экспоненциальную функцию e^{-x} можно разложить в ряд следующим образом:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \cdots$$

Запишем равенство (5) в таком виде:

$$H(t) = \frac{H_0}{2T^2}\left(t^2 - 2Tt + 2T^2\right) = H_0\left(1 - \frac{t}{T} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^2\right)$$

Очевидно, что в скобках последнего выражения стоят три первых члена разложения экспоненциальной функции. Т. о. Можем записать:

$$H(t) \approx H_0 e^{-\frac{t}{T}} \qquad (9)$$

По аналогии с предыдущим равенство (7) будет иметь вид:

$$H(t) \approx -H_0\left(e^{-\frac{t}{T}} + 1\right) \qquad (10)$$

3. Формула скорости воды в трубопроводе сообщающихся сосудов

Формула для вычисления скорости жидкости в трубопроводе имеет вид:

$$w = \frac{q}{s}, \tag{11}$$

где q - расход жидкости, s - сечение трубопровода. Расход жидкости вычисляется по формуле:

$$q = \frac{V(t)}{t} \tag{12}$$

По условию задачи $\frac{V(t)}{H(t)} = S = const$. Тогда можем записать: $q = \frac{S \cdot H(t)}{t}$. Подставляя полученное выражение в (11) и с учётом (9), получаем формулу скорости жидкости в трубопроводе, соединяющем наши резервуары.

$$w \approx \frac{S \cdot H_0}{s \cdot t} e^{-\frac{t}{T}} \tag{13}$$

Под конец хотелось бы отметить, что Природа очень насыщена законами, которые имеют вид экспоненциальных функций. И, видимо, гидродинамика здесь не является исключением. Не задаваясь какими-то объяснениями и коментариями мы просто просмотрели справочник по физике и выписали некоторые классические законы (см. Приложение).

Данную задачу не сложно обобщить на случай резервуаров, расположенных на разных уровнях и имеющих другие начальные условия.

Приложение

Экспоненциальные законы физики

1. Механические колебания

$$A = A_0 e^{-\frac{bt\omega_0}{2n}}$$

2. Кинетическая теория газов

Распределение Максвелла

$$dn = ku^2 du \cdot e^{\left(-\frac{u}{u_n}\right)^2}$$

Распределение молекул по энергиям

$$dn_w = \xi dW \cdot e^{-\frac{W_n}{kT}}$$

Закон распределения свободных пробегов

$$dw(x) = n\sigma \cdot dx \cdot e^{-n\sigma x}$$

3. Статистическая физика

Распределение Гиббса

$$\omega(E) = \frac{\Omega(E)}{Z} e^{-\frac{E}{\Theta}}$$

Барометрическая формула

$$P = P_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

4. Квантовая статистика

Распределение Бозе - Эйнштейна

$$\frac{g_i}{N_i} = e^{\frac{w-\mu}{kT}} - 1$$

Распределение Ферми - Дирака

$$\frac{g_i}{N_i} = e^{\frac{w-\mu}{kT}} + 1$$

5. Второй закон термодинамики (статистический смысл)

$$P = e^{\frac{S}{k}}$$

6. Броуновское движение

$$dw = \xi \cdot e^{\left(-\frac{x^2}{2\Delta_x^2}\right)} dx$$

7. Теория жидкостей

Вязкость

$$\eta = Te^{\frac{W}{kT}}$$

Коэффициент диффузии

$$D = \xi \cdot e^{-\frac{W}{kT}}$$

8. Теплоёмкость твёрдых тел

Длина свободного пробега фотона

$$\lambda = k \cdot e^{-\frac{T_e}{2T}}$$

9. Теория плазмы

Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi = \varsigma \cdot e^{-\frac{r}{D}}$$

10. Теория полупроводников

Концентрация электронов проводимости и дырок

$$n = p = \sqrt{N_C N_V} \cdot e^{-\frac{\Delta W}{2kT}}$$

Зависимость тока от внешнего напряжения

$$I = I_0\left(e^{\frac{eU}{kT}} - 1\right)$$

Эмиссионные явления в металлах. Зависимость плотности тока холодной эмиссии от напряжённости

$$j = \xi \cdot e^{-\frac{E_0}{E}}$$

Явление самоиндукции

$$I = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$$

11. Электромагнитные колебания

Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\beta t}$$

12. Основы акустики

Уравнение сферической волны

$$\varphi = \frac{A}{r} e^{i(kr - wt)}$$

13. Молекулярная оптика

Закон Бутера - Ламберга

$$I = I_0 e^{-\alpha d}$$

14. Тепловое излучение

Формула Планка

$$\varepsilon = \xi e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

15. Квантовая механика

Решение уравнения Шрёдингера

$$f(t) = e^{-it\frac{E}{\hbar}}$$

Объёмная плотность электрического заряда

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{r}{a}}$$

16. Элементарные частицы

Волновая функция

$$A_\alpha(x) = \xi_\alpha e^{iPx}$$

Потенциал взаимодействия Юкавы

$$V(r) = g e^{-\frac{mCr}{h}}$$

17. Электротехника

падение напряжения и тока в цепи CR

$$U = U_0 e^{-\frac{t}{CR}} \qquad I = I_0 e^{-\frac{t}{CR}}$$