

Франц Герман

KIW – Gesellschaft e. V., Dresden, BRD,
E-Mail: kiw_dd@arcor.de hanzmannferr@mail.ru

О пользе обобщений

Напомним формулировку известной теоремы Нагеля:

Прямые, проходящие через вершины произвольного треугольника и делящие его периметр пополам пересекаются в одной точке N (точка Нагеля).

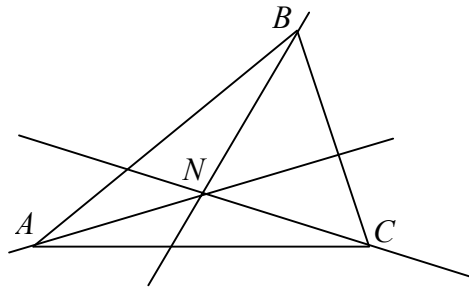


Рис. 1

Развернём стороны треугольника AB и BC на продолжение стороны AC , как это показано на Рис. 2

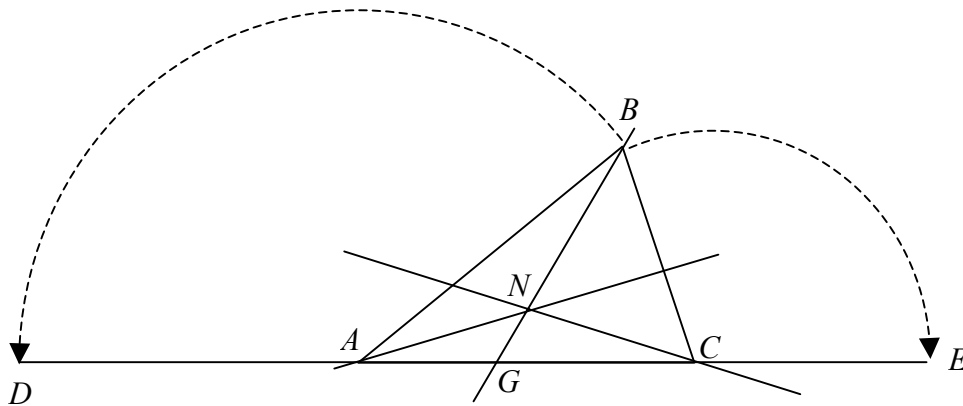


Рис. 2

Здесь $DA = AB$, $BC = CE$, тогда точка G будет точкой, делящей периметр данного треугольника пополам т.е $DG = GE$.

Отрезок DE будем называть **развёрткой периметра** данного треугольника, а точку G будем называть **серединой развёртки периметра**. Очевидно, что развернуть периметр аналогичным способом можно относительно любой другой стороны данного треугольника.

Теперь теорему Нагеля можно переформулировать следующим образом:

Прямые, проходящие через вершины произвольного треугольника и противоположные середины развёртки периметра пересекаются в одной точке N .

По аналогии с развёрткой периметра можно ввести понятие **свёртки периметра**, т.е. боковые стороны треугольника будем разворачивать на прямую AC не во внешнюю сторону, а во внутреннюю (Рис. 3).

Здесь $DA = AB$, $BC = CE$.

Точку F ($EF = FD$) будем называть **серединой свёртки периметра**.

Очевидно, что свернуть периметр аналогичным способом можно относительно любой другой стороны данного треугольника. В общем случае точка G и точка F это разные точки.

По аналогии с теоремой Нагеля можно сформулировать следующую теорему:

Прямые, проходящие через вершины произвольного треугольника и противоположные середины свёртки периметра пересекаются в одной точке L .

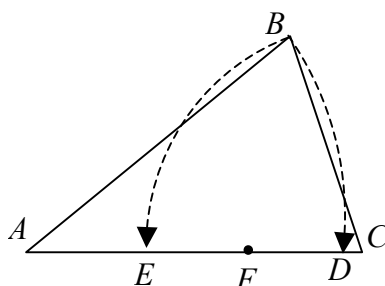


Рис. 3

Если точка F_k является серединой свёртки периметра треугольника $A_1A_2A_3$ относительно стороны A_iA_j , то справедливо отношение:

$$\frac{|A_iF_k|}{|F_kA_j|} = \frac{|A_iA_j| + (|A_kA_i| - |A_kA_j|)}{|A_iA_j| - (|A_kA_i| - |A_kA_j|)} \quad (1)$$

Зная обратную теорему Чевы и используя выражение (1), не трудно показать вновь сформулированную теорему.

Для развёрнутой записи отношений (1) необходимо сохранять обход треугольника по вершинам.

Для чисто визуального представления точки F заметим, что

$$|A_iF_k| + |A_jA_k| = |F_kA_j| + |A_iA_k| = \frac{p}{2}, \quad (2)$$

где p – периметр данного треугольника. Зная выражение (2) и обратную теорему Чевы, можно доказать сформулированную теорему без использования отношения (1).

Пока не исследован вопрос, что представляет собой прямая NL (Рис. 4), имеет ли она какие-то интересные особенности. Не исключено, что на этой прямой могут находиться и другие известные точки, характеризующие данный треугольник.

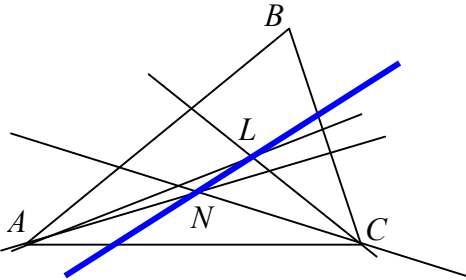


Рис. 4