Е. В. Бурлаченко

ДВЕ АЛГЕБРЫ И СВОЙСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1

Будем рассматривать формальный степенной ряд с действительными коэффициентами как последовательность этих коэффициентов, т.е. как элемент векторного пространства. Обозначим:

$$a_i = (a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots),$$
$$1\ = (1,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\ \ldots\ ),$$
$$x\ = (0,\quad 1,\quad 0,\quad 0,\ \ldots\ ).$$

Базис пространства, в котором координаты каждой последовательности (т.е. коэффициенты разложения по базисным векторам) совпадают с ее значениями, назовем основным. Каждой матрице A поставим в соответствие преобразование, отоброжающее последовательность векторов основного базиса на последовательность столбцов матрицы A. Матрицу и соответствующее ей преобразование будем обозначать одним и тем же символом. Столбцы и строки матрицы пронумеруем целыми неотрицательными числами. Образ вектора a_i при преобразовании A обозначим $A(a_i)$.

Целые неотрицательные числа будем обозначать буквами n, m, p, r, i, целые числа – буквой k, действительные числа – буквами α, β, φ.

Произведением a_ib_i назовем вектор $[a_i](b_i) = [b_i](a_i)$, где

$$[a_i] = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Матрицу вида $[a_i]$ (i-й член n-го столбца матрицы равен a_{i-n} и нулю при $n > i$) назовем матрицей умножения на вектор a_i.

Обратным к a_i назовем вектор $a_i^{-1} = \dfrac{1}{a_i}$, определяемый уравнением

$$\left[a_i\right]\left(a_i^{-1}\right)=1.$$

Вектор

$$a_i^n=\left[a_i\right]\left(a_i^{n-1}\right)$$

назовем n-й степенью a_i. n-й вектор основного базиса представим как n-ю степень x. Каждый вектор запишется в виде

$$a_i=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n .$$

n-й столбец матрицы $\left[a_i\right]$ принимает вид $x^n a_i$. Сама матрица умножения представима в виде

$$\left[a_i\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[x^n\right].$$

Матрицу, n-й столбец которой является n-й степенью a_i, назовем матрицей степеней вектора a_i и обозначим $\left\langle a_i\right\rangle$. Например,

$$\left\langle 1\right\rangle=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdot\\0&0&0&\cdot\\0&0&0&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},\quad \left\langle x\right\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdot\\0&1&0&\cdot\\0&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},\quad \left\langle x^2\right\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&0&0&0&\cdot\\0&0&1&0&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix};$$

$$\left\langle\frac{1}{1-x}\right\rangle=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\cdot\\0&1&2&3&\cdot\\0&1&3&6&\cdot\\0&1&4&10&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},\quad \left\langle\frac{x}{1-x}\right\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&0&\cdot\\0&1&1&0&0&\cdot\\0&1&2&1&0&\cdot\\0&1&3&3&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Так как

$$\left\langle a_i\right\rangle\left(x^n b_i\right)=a_i^n\left\langle a_i\right\rangle\left(b_i\right),$$

то

$$\left\langle a_i\right\rangle\left[b_i\right]=\left[\left\langle a_i\right\rangle\left(b_i\right)\right]\left\langle a_i\right\rangle.$$

Например,

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&1&1&0&\cdot\\0&1&2&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\1&1&0&0&\cdot\\0&1&1&0&\cdot\\0&0&1&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\1&1&0&0&\cdot\\1&2&1&0&\cdot\\1&3&3&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},$$

т.е.

$$\left\langle \frac{x}{1-x}\right\rangle [1+x]=\left[\frac{1}{1-x}\right]\left\langle \frac{x}{1-x}\right\rangle.$$

Таким образом, матрица степеней отображает произведение векторов на произведение их образов:

$$\langle a_i\rangle(b_i c_i)=\langle a_i\rangle(b_i)\langle a_i\rangle(c_i),$$

так что

$$\langle a_i\rangle\langle b_i\rangle=\langle\langle a_i\rangle(b_i)\rangle.$$

Если рассматривать a_i и b_i как функции $a(x)$ и $b(x)$, то выражению $\langle a_i\rangle(b_i)$ соответствует подстановка $b(a(x))$.

Обозначим:

$$e^{\beta x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n x^n}{n!}.$$

Убедимся, что векторы данного вида умножаются по правилу

$$e^{\beta x}e^{\alpha x}=e^{(\beta+\alpha)x}.$$

Так как

$$\langle e^x-1\rangle(1+x)=e^x,$$

то

$$\langle e^x-1\rangle^{-1}(e^x)=1+x.$$

Обозначим:

$$\langle e^x-1\rangle^{-1}(e^{\beta x})=(1+x)^{\beta},$$

так что

$$(1+x)^{\beta}(1+x)^{\alpha}=(1+x)^{\beta+\alpha}.$$

Пусть $\varphi_{(n,\, m)}$ – элемент матрицы $\langle e^x-1\rangle^{-1}$, где n – номер строки, m –

номер столбца. Тогда

$$(1+x)^{\beta} =$$

$$=\left(1,\ \beta,\ \varphi_{(2,\,1)}\beta+\frac{\beta^2}{2!},\ \varphi_{(3,\,1)}\beta+\frac{\varphi_{(3,\,2)}\beta^2}{2!}+\frac{\beta^3}{3!},\ \dots\right)=$$

$$=\left(1,\ \beta,\ \frac{\beta\left(\beta+\alpha_{(2,\,1)}\right)}{2!},\ \frac{\beta\left(\beta+\alpha_{(3,\,1)}\right)\left(\beta+\alpha_{(3,\,2)}\right)}{3!},\ \dots\right),$$

где $\alpha_{(n,\,m)}$ – комплексные числа. Так как все члены вектора $(1+x)^m$, начиная с $(m+1)$-го, равны нулю, то $\alpha_{(n,\,m)}=-m$. Таким образом,

$$(1+x)^{\beta}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\prod_{m=0}^{n-1}(\beta-m).$$

Вектор

$$\left\langle a_i-1\right\rangle\left((1+x)^{\beta}\right)=a_i^{\beta},\ a_0=1,$$

назовем β-й степенью a_i. Так как

$$\left\langle b_i\right\rangle\left\langle a_i-1\right\rangle=\left\langle\left\langle b_i\right\rangle\left(a_i\right)-1\right\rangle,$$

то

$$\left\langle b_i\right\rangle\left(a_i^{\beta}\right)=\left(\left\langle b_i\right\rangle\left(a_i\right)\right)^{\beta}.$$

Первый столбец матрицы $\left\langle e^x-1\right\rangle^{-1}$ обозначим $\log(1+x)$. Вектор $\left\langle a_i-1\right\rangle\left(\log(1+x)\right)$, $a_0=1$, назовем логарифмом вектора a_i и обозначим $\log a_i$; вектор $\left\langle xa_i\right\rangle\left(e^x\right)$, где a_0 произвольно, назовем экспонентой вектора xa_i и обозначим e^{xa_i}. Так как

$$\left\langle xa_i\right\rangle\left\langle e^x-1\right\rangle\left\langle\log(1+x)\right\rangle=$$
$$=\left\langle e^{xa_i}-1\right\rangle\left\langle\log(1+x)\right\rangle=\left\langle\log e^{xa_i}\right\rangle=\left\langle xa_i\right\rangle,$$

то

$$\log e^{xa_i}=xa_i.$$

Так как

$$\left\langle a_i - 1\right\rangle \left\langle \log(1+x)\right\rangle \left\langle e^x - 1\right\rangle =$$

$$= \left\langle \log a_i\right\rangle \left\langle e^x - 1\right\rangle = \left\langle e^{\log a_i} - 1\right\rangle = \left\langle a_i - 1\right\rangle,$$

то

$$e^{\log a_i} = a_i.$$

Так как

$$\left\langle \log a_i\right\rangle \left(e^{\beta x}\right) = \left\langle \beta \log a_i\right\rangle \left(e^x\right) = a_i^\beta,$$

то

$$\log a_i^\beta = \beta \log a_i.$$

Диагональную матрицу, диагональные элементы которой равны значениям вектора e^x, обозначим $\left|e^x\right|$:

$$\left|e^x\right|(a_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}, \quad \left|e^x\right|^{-1}(a_i) = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n x^n.$$

n-ю строку матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1} \left\langle \log a_i\right\rangle \left|e^x\right|$$

обозначим $u_n(x)$. Так как

$$\left\langle \log a_i\right\rangle \left(e^{\beta x}\right) = a_i^\beta,$$

то

$$a_i^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(\beta)}{n!} x^n.$$

Например, если $a_i = (1-x)^{-1}$, то

$$u_n(\beta) = \beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1) = [\beta]_n.$$

Пусть D и D^{-1} – преобразования, соответствующие дифференцированию и интегрированию в алгебре формальных степенных рядов:

$$D=\left|e^x\right|\left[x\right]^*\left|e^x\right|^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdot\\0&0&2&0&\cdot\\0&0&0&3&\cdot\\0&0&0&0&\cdot\\.&.&.&.&.\end{pmatrix},$$

где знак * означает транспонирование,

$$D^{-1}=\left|e^x\right|\left[x\right]\left|e^x\right|^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\cdot\\1&0&0&0&\cdot\\0&\frac{1}{2}&0&0&\cdot\\0&0&\frac{1}{3}&0&\cdot\\.&.&.&.&.\end{pmatrix}.$$

Обозначим:

$$D(a_i)=(a_i)',\ D^{-1}(a_i)=\int a_i\,.$$

Убедимся, что

$$D[a_i]=[a_i]D+\left[(a_i)'\right],$$

или

$$(a_ib_i)'=a_i(b_i)'+(a_i)'b_i:$$

$$\begin{pmatrix}a_1&a_0&0&0&\cdot\\2a_2&2a_1&2a_0&0&\cdot\\3a_3&3a_2&3a_1&3a_0&\cdot\\4a_4&4a_3&4a_2&4a_1&\cdot\\.&.&.&.&.\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a_0&0&0&\cdot\\0&a_1&2a_0&0&\cdot\\0&a_2&2a_1&3a_0&\cdot\\0&a_3&2a_2&3a_1&\cdot\\.&.&.&.&.\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1&0&0&0&\cdot\\2a_2&a_1&0&0&\cdot\\3a_3&2a_2&a_1&0&\cdot\\4a_4&3a_3&2a_2&a_1&\cdot\\.&.&.&.&.\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\left(a_i^n\right)'=na_i^{n-1}(a_i)',$$

$$D\langle a_i\rangle=\left[(a_i)'\right]\langle a_i\rangle D,$$

или

$$(\langle a_i\rangle(b_i))'=(a_i)'\langle a_i\rangle\left((b_i)'\right).$$

Так как

$$\left(e^x\right)'=e^x,$$

то

$$\left(\langle \log a_i \rangle \left(e^x\right)\right)' = (\log a_i)' \langle \log a_i \rangle \left(e^x\right),$$

$$(\log a_i)' = \frac{(a_i)'}{a_i}.$$

Отсюда находим:

$$\log(1+x) = \int (1+x)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

2

Эйлер первым из математиков обнаружил, что некоторые свойства натуральных чисел, плохо различимые в рамках теории чисел, становятся зримей при обращении к алгебре формальных степенных рядов.

Простое число имеет два делителя – единицу и самого себя. Если считать это определением, то единица не является простым числом. Распределение простых чисел не подчиняется строгому закону, но Эйлер открыл, что последовательность сумм делителей натуральных чисел является реккурентной, т.е. такой, каждый член которой по определенному правилу вычисляется по предыдущим членам. Его мемуар «Открытие наиболее необычайного закона чисел, относящегося к суммам их делителей» можно найти в [1, стр.112].

Изучая разбиения натуральных чисел, Эйлер придумал метод производящих функций, суть которого в том, что алгоритм получения искомых комбинаторных величин связывается с алгоритмом операции умножения в алгебре формальных степенных рядов. Отсюда, например, видно, что

$$P(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - x^n\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n,$$

где $p(0) = 1$, $p(n)$ – число всевозможных разбиений числа n на слагаемые, т.е. число решений в неотрицательных целых числах уравнения

$$n = 1m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n.$$

Раскладывая обратный ряд по степеням x, находим:

$$P^{-1}(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - x^n\right) =$$

$$=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\frac{3n^2-n}{2}}+x^{\frac{3n^2+n}{2}}\right).$$

Доказательство вытекает из другого равенства [2. стр.138]:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(p_{\div}(n)-p_{í}(n)\right)x^n,$$

где $p_{\div}(n)$ – число разбиений n на четное число неравных слагаемых, $p_{í}(n)$ – число разбиений n на нечетное число неравных слагаемых.

Таким образом,

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+p(n-12)+\ldots$$

Последовательность слагаемых обрывается, как только число, стоящее под знаком p, становится отрицательным.

Следуя Эйлеру, прологарифмируем ряд $P^{-1}(x)$, продифференцируем полученный результат и домножим на $-x$:

$$\log P^{-1}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-x^n\right),$$

$$-x\left(\log P^{-1}(x)\right)'=B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}.$$

Разлагая каждый член суммы $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}$ в геометрическую прогрессию, получаем:

$$\begin{aligned}B(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 &+ \dots \\ +2x^2 \quad + 2x^4 \quad + 2x^6 \quad + 2x^8 &+ \dots \\ +3x^3 \quad + 3x^6 \quad &+ \dots \\ +4x^4 \quad + 4x^8 &+ \dots \\ +5x^5 \quad &+ \dots \\ +6x^6 \quad &+ \dots \\ +7x^7 \quad &+ \dots \\ +8x^8 &+ \dots\end{aligned}$$

«Мы легко здесь находим, – заключает Эйлер, – что каждая степень x встречается столько раз, сколько ее показатель имеет делителей, и что каждый делитель появляется в качестве коэффициента при той же самой степени x. Следовательно, если мы соберем члены с одинаковыми степенями, то коэффициент при каждой степени x будет суммой делителей показателя степени». Таким образом,

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n,$$

где $\sigma(n)$ – сумма делителей числа n.

С другой стороны,

$$\left(\log P^{-1}(x)\right)' = \frac{\left(P^{-1}(x)\right)'}{P^{-1}(x)}.$$

Пользуясь разложением $P^{-1}(x)$ по степеням x, получаем

$$B(x) = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + \dots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \dots},$$

$$B(x) P^{-1}(x) = -x\left(P^{-1}(x)\right)'.$$

Отсюда выводим:

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \dots$$

Последовательность слагаемых обрывается, как только число, стоящее под знаком σ, становится отрицательным; если появляется символ $\sigma(0)$, он заменяется числом n.

Формальный ряд

$$a(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

называется рядом Дирихле [3. стр.144]. На множестве рядов Дирихле задается операция умножения:

$$a(s)b(s)=c(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s},$$

где

$$c_n=\sum_{d|n}a_d b_{n/d},$$

символ $d\mid n$ означает, что суммирование ведется по всем делителям числа n:

$$c_1=a_1b_1,$$

$$c_2=a_1b_2+a_2b_1,$$

$$c_3=a_1b_3+a_3b_1,$$

$$c_4=a_1b_4+a_2b_2+a_4b_1.$$

Определенное таким образом умножение коммутативно и ассоциативно.

Отображение $\frac{1}{n^s}\to x^n$ переводит алгебру рядов Дирихле в изоморфную ей алгебру, заданную на множестве формальных степенных рядов вида

$$a(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n.$$

Умножение задается матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_3 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_4 & a_2 & 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & \cdot \\ 0 & a_6 & a_3 & a_2 & 0 & 0 & a_1 & \cdot \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

n-й столбец которой, $n>0$, имеет вид $a\left(x^n\right)$. Как видим, это то самое преобразование, которым пользовался Эйлер для нахождения ряда $B(x)$: если первый столбец матрицы A – ряд $a(x)=x(1-x)^{-1}$, то

$$B(x)=A\left(x(1-x)^{-2}\right).$$

3

На множестве векторов

$$a_i=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

зададим операцию $\|a_i\|$- умножения:

$$a_i \circ b_i=\|a_i\|(b_i)=\|b_i\|(a_i),$$

где

$$\left\| a_i \right\| = \begin{pmatrix} a_\Sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_3 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_4 & a_2 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_6 & a_3 & a_2 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_8 & a_4 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & \cdot \\ 0 & a_9 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

n-й столбец матрицы имеет вид $\left\langle x^n \right\rangle(a_i)$, так что

$$\left\langle 1 \right\rangle(a_i) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_\Sigma .$$

Для обращения с величинами $a_\Sigma = \infty$ и $a_\Sigma = 0$ можно ввести непротиворечивые правила, но нам это без надобности.

Так как

$$\left\| x^n \right\| = \left\langle x^n \right\rangle,$$

то

$$\left\| a_i \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\langle x^n \right\rangle .$$

$\left\| a_i \right\|$-обратным к a_i назовем вектор $a_i^{(-1)}$, определяемый равенством

$$a_i \circ a_i^{(-1)} = a_i^{(0)} = x .$$

Это согласуется с тем, что $\left\| x \right\|$ – единичная матрица. Обозначим

$$a_i^{(n)} = \left\| a_i \right\| \left(a_i^{(n-1)} \right).$$

Для краткости алгебру формальных степенных рядов будем называть $[\, a_i \,]$- алгеброй, алгебру, задаваемую матрицами $\left\| a_i \right\|$, – $\left\| a_i \right\|$-алгеброй.

Проследим аналогию:

$$\left[\, a_i \,\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\, x^n \,\right], \quad \left\| a_i \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\| x^n \right\|.$$

Так как

$$\left[\, x^n \,\right]\left[\, x^m \,\right] = \left[\, x^m \,\right]\left[\, x^n \,\right] = \left[\, x^{n+m} \,\right],$$

то

$$\left[\, a_i \,\right]\left[\, b_i \,\right] = \left[\, b_i \,\right]\left[\, a_i \,\right];$$

так как

$$\left\langle x^n \right\rangle \left\langle x^m \right\rangle = \left\langle x^m \right\rangle \left\langle x^n \right\rangle = \left\langle x^{nm} \right\rangle,$$

то

$$\left\| a_i \right\| \left\| b_i \right\| = \left\| b_i \right\| \left\| a_i \right\|.$$

Так как

$$\left[\, x^m \,\right]^n = \left[\, x^{mn} \,\right],$$

то $\left[\, a_i \,\right]$ является степенным рядом:

$$\left[\, a_i \,\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\, x \,\right]^n;$$

так как

$$\left\langle x^m \right\rangle^n = \left\langle x^{m^n} \right\rangle,$$

то $\left\| a_i \right\|$ является суммой $a_1 \left\| x \right\|$ и бесконечного множества степенных рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m^n} \left\| x^m \right\|^n,$$

где $m > 1$ и не принимает значений, равных степени натурального числа, отличной от 1.

Отсюда видно, что если при фиксированном $m > 1$ из матрицы $\left\| a_i \right\|$ удалить все строки, кроме строк с номерами m^n и все столбцы, кроме столбцов с номерами m^n, то получится обычная матрица умножения. Например, при $m = 2$, $m = 3$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ a_4 & a_2 & a_1 & 0 & \cdot \\ a_8 & a_4 & a_2 & a_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_3 & a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ a_9 & a_3 & a_1 & 0 & \cdot \\ a_{27} & a_9 & a_3 & a_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Действительно, матрицы вида

$$\| a_i \| = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m^n} \| x^m \|^n , \; m > 1,$$

будучи степенными рядами, задают алгебру, изоморфную $[\, a_i \,]$-алгебре: если

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ,$$

то

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m^n} \right) \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{m^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{m^n} .$$

Например,

$$\left(x + x^2 \right)^{(m)} = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^{2^n} ,$$

$$\left(x + x^2 \right)^{(-m)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m+n-1}{n} x^{2^n} .$$

И вообше, если

$$\prod_{n=1}^{r} (x + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{r} a_n x^n ,$$

то

$$\left(x^m + \varphi_1 x \right) \circ \ldots \circ \left(x^m + \varphi_r x \right) = \sum_{n=0}^{r} a_n x^{m^n} , \; m > 1.$$

В $\| a_i \|$-алгебре векторы вида $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} x^n$ играют ту же роль, которую векторы вида $\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n$ играют в $[\,a_i\,]$-алгебре. Последняя обладает свойством, позволяющим свободно манипулировать областью сходимости рядов. А именно, если

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n,$$

то

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n \beta^n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n \beta^n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n \beta^n x^n.$$

Это свойство обусловлено тем, что матрица $\langle\,\beta x\,\rangle$ как матрица степеней отображает произведение векторов на произведение их образов:

$$\langle\,\beta x\,\rangle(\,a_i b_i\,)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n \beta^n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n \beta^n x^n\right).$$

$\|\,a_i\,\|$-алгебра обладает аналогичным свойством: если

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n\right)\circ\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n,$$

то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{\beta} x^n\right)\circ\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n n^{\beta} x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n n^{\beta} x^n.$$

Обозначим

$$\varsigma=x(1-x)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n.$$

Матрицу, n-м столбцом которой является вектор $a_i^{(n)}$, обозначим $\langle\langle a_i\rangle\rangle$. Например,

$$\langle\langle\varsigma\rangle\rangle=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&\cdot\\1&1&1&1&1&\cdot\\0&1&2&3&4&\cdot\\0&1&2&3&4&\cdot\\0&1&3&6&10&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},\quad \langle\langle\varsigma-x\rangle\rangle=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\cdot\\1&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&1&1&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&1&2&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&1&2&1&\cdot\\0&1&1&0&\cdot\\0&1&2&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&1&4&3&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Видно, что матрица $\langle\langle a_i\rangle\rangle$ не имеет обратной.

Рассмотрим одностороннее произведение матрицы $\langle\langle a_i\rangle\rangle$ с матрицей степеней $\langle b_i\rangle$, $b_i=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$. Так как

$$\langle\langle a_i\rangle\rangle\left(x^m b_i\right)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left\|a_i^{(n)}\right\|\left(a_i^{(m)}\right)=\left\|\langle\langle a_i\rangle\rangle\left(b_i\right)\right\|\left(a_i^{(m)}\right),$$

то

$$\langle\langle a_i\rangle\rangle\left[b_i\right]=\left\|\langle\langle a_i\rangle\rangle\left(b_i\right)\right\|\langle\langle a_i\rangle\rangle,$$

или

$$\langle\langle a_i\rangle\rangle\left(b_ic_i\right)=\langle\langle a_i\rangle\rangle\left(b_i\right)\circ\langle\langle a_i\rangle\rangle\left(c_i\right).$$

Таким образом, матрица $\langle\langle a_i\rangle\rangle$ отображает $\left[a_i\right]$-произведение векторов на $\left\|a_i\right\|$-произведение их образов. Следовательно,

$$\langle\langle a_i\rangle\rangle\langle b_i\rangle=\langle\langle\langle\langle a_i\rangle\rangle\left(b_i\right)\rangle\rangle.$$

Отсюда получаем для $\left\|a_i\right\|$-алгебры аналоги операций возведения в степень и логарифмирования. Обозначим:

$$a_i^{(\beta)}=\langle\langle a_i-x\rangle\rangle\left(\left(1+x\right)^{\beta}\right),\ a_1=1,$$

так что

$$a_i^{(\beta)} \circ a_i^{(\varphi)} = a_i^{(\beta+\varphi)};$$

$$\log\circ a_i = \langle\langle a_i - x\rangle\rangle\left(\log(1+x)\right),\ a_1 = 1.$$

Так как

$$\langle\langle a_i - x\rangle\rangle\left\langle\log(1+x)\right\rangle\left(e^x - 1\right) = a_i - x,$$

то

$$\langle\langle \log\circ a_i\rangle\rangle\left(e^{\beta x}\right) = a_i^{(\beta)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log\circ a_i)^{(n)}}{n!} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\log\dfrac{a_i}{x}\right)^n}{n!},$$

где

$$\frac{a_i}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n;$$

$$\log\circ a_i^{(\beta)} = \beta\log\circ a_i.$$

Так как

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log\circ a_i)^{(n)}}{n!}\right)\circ\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log\circ b_i)^{(n)}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log\circ a_i + \log\circ b_i)^{(n)}}{n!},$$

то

$$\log\circ(a_i \circ b_i) = \log\circ a_i + \log\circ b_i.$$

n-ю строку матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\langle\langle \log\circ a_i\rangle\rangle\left|e^x\right|$ обозначим $p_n(x)$. Тогда

$$a_i^{(\beta)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n(\beta)}{n!}x^n.$$

4

Представление числа n в виде произведения натуральных множителей, упорядоченных по возрастанию, будем называть разложением числа n на множители. Пусть

$$a_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad b_i = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Выявим интересную аналогию между строками матриц $\langle b_i - b_0 \rangle$ и $\langle\langle a_i - a_1 x\rangle\rangle$ с одной стороны и разбиениями на слагаемые и разложениями на множители числа n – с другой.

Представим таблицу, строки которой образуются последовательным умножение различных векторов:

$$1,\ b_i,\ b_i c_i,\ b_i c_i d_i,\ \ldots$$

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 1, & 0, & 0, & \cdot \\
1 & b_0, & b_1, & b_2, & \cdot \\
2 & c_0 b_0, & c_1 b_0 + c_0 b_1, & c_2 b_0 + c_1 b_1 + c_0 b_2, & \cdot \\
3 & d_0 c_0 b_0, & d_1 c_0 b_0 + d_0 c_1 b_0 + d_0 c_0 b_1, & \begin{pmatrix} d_2 c_0 b_0 + d_1 c_1 b_0 + d_1 c_0 b_1 + \\ + d_0 c_2 b_0 + d_0 c_1 b_1 + d_0 c_0 b_2 \end{pmatrix}, & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Алгоритм операции умножения приводит к тому, что множеству слагаемых в разложении n-го члена m-й строки таблицы соответствует множество размещений n неразличимых предметов по m различным ячейкам: различным векторам соответствуют различные ячейки, номеру члена соответствует число предметов в ячейке.

Если $b_i = c_i = d_i = \ldots$, таблица принимает вид

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & 1, & 0, & 0, & 0, & \cdot \\
1 & b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \cdot \\
2 & b_0^2, & 2b_0 b_1, & 2b_0 b_2 + b_1^2, & 2b_0 b_3 + 2b_1 b_2, & \cdot \\
3 & b_0^3, & 3b_0^2 b_1, & 3b_0^2 b_2 + 3b_0 b_1^2, & 3b_0^2 b_3 + 6b_0 b_1 b_2 + b_1^3, & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Множеству слагаемых в разложении n-го члена m-й строки таблицы соответствует множество размещений n неразличимых предметов по m неразличимым ячейкам: выражение $b_0^{m_0} b_1^{m_1} b_2^{m_2} \ldots\, b_n^{m_n}$ означает, что в соответствующем слагаемому размещении m_p ячеек содержат одинаковое число предметов, равное p. Коэффициент при $b_0^{m_0} b_1^{m_1} b_2^{m_2} \ldots\, b_n^{m_n}$ равен

$$\frac{m!}{m_0!m_1!\ldots m_n!}.$$

Множество размещений n неразличимых предметов по m неразличимым ячейкам можно разбить на подмножества размещений с одинаковым числом пустых ячеек, равным p. Каждому такому подмножеству соответствует множество разбиений числа n на $m-p$ слагаемых. При $m<n$ число подмножеств равно m, при $m \ge n$ число подмножеств равно n.

Таким образом, n-й столбец таблицы, $n>0$, можно представить в виде

$$\begin{array}{c|lllll}
0 & 0 & & & & \\
1 & b_0^0\varphi_{(n,1)} & & & & \\
2 & 2b_0^1\varphi_{(n,1)} + & b_0^0\varphi_{(n,2)} & & & \\
3 & 3b_0^2\varphi_{(n,1)} + & 3b_0^1\varphi_{(n,2)} + & b_0^0\varphi_{(n,3)} & & \\
4 & 4b_0^3\varphi_{(n,1)} + & 6b_0^2\varphi_{(n,2)} + & 4b_0^1\varphi_{(n,3)} + & b_0^0\varphi_{(n,4)} & \\
. & . & . & . & . & \\
m>n & mb_0^{m-1}\varphi_{(n,1)} + & \cdots & + & b_0^{m-n}\varphi_{(n,n)} &
\end{array},$$

где

$$\varphi_{(n,\ m)} = \sum \frac{m!}{m_1!m_2!\ldots m_n!} b_1^{m_1} b_2^{m_2} \ldots b_n^{m_n}, \quad m \le n,$$

выражению $\prod\limits_{p=1}^{n} b_p^{m_p}$ соответствует разбиение $n = \sum\limits_{p=1}^{n} pm_p$, $\sum\limits_{p=1}^{n} m_p = m$ и суммирование ведется по всем разбиениям числа n на m слагаемых. Коэффициент при $\varphi_{(n,\ m)}$ в $(m+p)$-й строке таблицы равен вынесенному за знак суммы произведению величины b_0^p с ее долей комбинаторного коэффициента, т.е. $\dfrac{(m+p)!}{m!p!} b_0^p$.

Матрицу, n-й строкой которой является полином

$$q_n(x) = \sum_{m=1}^{n} \varphi_{(n,\ m)} x^m, \ q_0(x) = 1,$$

обозначим Q. Тогда, как видно из таблицы,

$$Q\left(\left(x+b_0\right)^m\right)=b_i^m,$$

и, следовательно,

$$Q=\left\langle b_i-b_0\right\rangle=$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & b_2 & b_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & b_3 & 2b_1b_2 & b_1^3 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & b_4 & 2b_1b_3+b_2^2 & 3b_1^2b_2 & b_1^4 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & b_5 & 2b_1b_4+2b_2b_3 & 3b_1^2b_3+3b_1b_2^2 & 4b_1^3b_2 & b_1^5 & 0 & \cdot \\
0 & b_6 & 2b_1b_5+2b_2b_4+b_3^2 & 3b_1^2b_4+6b_1b_2b_3+b_2^3 & 4b_1^3b_3+6b_1^2b_2^2 & 5b_1^4b_2 & b_1^6 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}$$

Отсюда, при $b_0=1$, получаем выражение значений b_i^{-1}и $\log b_i$ через значения b_i: n-й член b_i^{-1}, $n>0$, равен

$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\varphi_{(n,\ m)},$$

n-й член $\log b_i$ равен

$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}\frac{\varphi_{(n,\ m)}}{m}.$$

При $b_i=(1-x)^{-1}$

$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\varphi_{(n,\ m)}=0,\ n>1;\quad \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}\frac{\varphi_{(n,\ m)}}{m}=\frac{1}{n},$$

где

$$\varphi_{(n,\ m)}=\sum\frac{m!}{m_1!m_2!\ldots m_n!},\quad \sum_{p=1}^{n}pm_p=n,\quad \sum_{p=1}^{n}m_p=m,$$

и суммирование ведется по всем разбиениям числа n на m слагаемых.

Рассмотрим таблицу, m-й строкой которой является $a_i^{(m)}$:

$$
\begin{array}{c|llllll}
0 & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & \cdot \\
1 & 0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \cdot \\
2 & 0, & a_1a_1, & a_2a_1+a_1a_2, & a_3a_1+a_1a_3, & a_4a_1+a_2a_2+a_1a_4, & \cdot \\
3 & 0, & a_1a_1a_1, & \begin{pmatrix} a_2a_1a_1+ \\ a_1a_2a_1+a_1a_1a_2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a_3a_1a_1+ \\ a_1a_3a_1+a_1a_1a_3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a_4a_1a_1+a_2a_2a_1+a_2a_1a_2+ \\ a_1a_4a_1+a_1a_2a_2+a_1a_1a_4 \end{pmatrix}, & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Представим ее в виде:

$$
\begin{array}{c|llllll}
0 & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & \cdot \\
1 & 0, & a_1, & a_2, & a_{3,} & a_4, & \cdot \\
2 & 0, & a_1^2, & 2a_1a_2, & 2a_1a_3, & 2a_1a_4+a_2^2, & \cdot \\
3 & 0, & a_1^3, & 3a_1^2a_2, & 3a_1^2a_3, & 3a_1^2a_4+3a_1a_2^2, & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Алгоритм операции $\|a_i\|$-умножения приводит к тому, что множеству слагаемых в разложении n-го члена, $n>0$, m-й строки таблицы соответствует множество разложений числа n на m множителей: выражению $\prod_{p=1}^{n} a_p^{m_p}$ соответствует разложение $n=\prod_{p=1}^{n} p^{m_p}$, $\sum_{p=1}^{n} m_p = m$; коэффициент перед $a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots\, a_n^{m_n}$ равен $\dfrac{m!}{m_1!m_2!\,\ldots\, m_n!}$.

Множество разложений числа n на m множителей можно разбить на подмножества разложений с одинаковым числом единичных множителей, равным p; каждому такому подмножеству соответствует множество разложений числа n на $m-p$ неединичных множителей. Число подмножеств не может быть больше числа множителей в разложении n на простые множители.

Таким образом, n-й столбец таблицы, $n>1$, можно представить в виде

$$
\begin{array}{c|lllll}
0 & 0 & & & & \\
1 & a_1^0\alpha_{(n,\,1)} & & & & \\
2 & 2a_1^1\alpha_{(n,\,1)} & + \quad a_1^0\alpha_{(n,\,2)} & & & \\
3 & 3a_1^2\alpha_{(n,\,1)} & + \quad 3a_1^1\alpha_{(n,\,2)} & + \quad a_1^0\alpha_{(n,\,3)} & & \\
4 & 4a_1^3\alpha_{(n,\,1)} & + \quad 6a_1^2\alpha_{(n,\,2)} & + \quad 4a_1^1\alpha_{(n,\,3)} & + \quad a_1^0\alpha_{(n,\,4)} & \\
. & . & . & . & . & \\
m>r & ma_1^{m-1}\alpha_{(n,\,1)} + & \cdots & + & a_1^{m-r}\alpha_{(n,\,r)} &
\end{array} ,
$$

где r – число множителей в разложении n на простые множители,

$$
\alpha_{(n,\,m)} = \sum \frac{m!}{m_2!m_3!\ldots m_n!}\, a_2^{m_2}a_3^{m_3}\ldots a_n^{m_n}, \quad m \le r,
$$

выражению $\prod_{p=2}^{n} a_p^{m_p}$ соответствует разложение $n = \prod_{p=2}^{n} p^{m_p}$, $\sum_{p=2}^{n} m_p = m$, и суммирование ведется по всем разложениям числа n на m неединичных множителей. Коэффициент перед $\alpha_{(n,\,m)}$ в $(m+p)$-й строке таблицы равен вынесенному за знак суммы произведению величины a_1^p с ее долей комбинаторного коэффициента, т.е. $\dfrac{(m+p)!}{m!\,p!}a_1^p$.

Матрицу, n-й строкой которой является полином

$$
w_n(x) = \sum_{m=1}^{r} \alpha_{(n,\,m)} x^m, \quad w_0(x) = 0, \quad w_1(x) = 1,
$$

обозначим W. Тогда, как видно из таблицы,

$$
W\left((x + a_1)^m\right) = a_i^{(m)}
$$

и, следовательно,

$$
W = \langle\langle a_i - a_1 x \rangle\rangle :
$$

$$\langle\langle a_i - a_1 x\rangle\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_4 & a_2^2 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_6 & 2a_2a_3 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_7 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_8 & 2a_2a_4 & a_2^3 & 0 & \cdot \\ 0 & a_9 & a_3^2 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_{10} & 2a_2a_5 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_{12} & 2a_2a_6 + 2a_4a_3 & 3a_2^2a_3 & 0 & \cdot \\ 0 & a_{13} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_{14} & 2a_2a_7 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_{15} & 2a_3a_5 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_{16} & 2a_2a_8 + a_4^2 & 3a_2^2a_4 & a_2^4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Отсюда при $a_1 = 1$ получаем выражение значений $a_i^{(-1)}$ и $\operatorname{logo} a_i$ через значения a_i: n-й член $a_i^{(-1)}$, $n > 1$, равен

$$\sum_{m=1}^{r} (-1)^m \alpha_{(n,\, m)},$$

где r – число множителей в разложении n на простые множители, n-й член $\operatorname{logo} a_i$ равен

$$\sum_{m=1}^{r} (-1)^{m+1} \frac{\alpha_{(n,\, m)}}{m}.$$

5

Рассмотрим фрагмент таблицы, k -й строкой которой является $\varsigma^{(k)}$:

$k \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4	0	1	4	4	10	4	16	4	20	10	16	4	40	4	16	16	35	4	40	·
3	0	1	3	3	6	3	9	3	10	6	9	3	18	3	9	9	15	3	18	·
2	0	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	·
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	·
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	·
−1	0	1	−1	−1	0	−1	1	−1	0	0	1	−1	0	−1	1	1	0	−1	0	·
−2	0	1	−2	−2	1	−2	4	−2	0	1	4	−2	−2	−2	4	4	0	−2	−2	·
−3	0	1	−3	−3	3	−3	9	−3	−1	3	9	−3	−9	−3	9	9	0	−3	−9	·
−4	0	1	−4	−4	6	−4	16	−4	−4	6	16	−4	−24	−4	16	16	1	−4	−24	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·

Пусть символ $|1|_n$ означает единицу. Символ $|m|_n$, $m > 1$, определим рекуррентной формулой

$$|m|_n = \sum_{d|n} |m-1|_d ,$$

так что $|2|_n$ означает число делителей числа n, и т.д.:

$$|2|_n = \sum_{d|n} |1|_d , \quad |3|_n = \sum_{d|n} |2|_d , \ \dots$$

По определению n -й член вектора $\varsigma^{(m)}$, $n > 0$, $m > 0$, равен $|m|_n$.

Представим таблицу, m -й строкой которой, является вектор $(1-x)^{-m}$:

$m\setminus n$	0	1	2	3	4	$\cdot$
1	1	1	1	1	1	$\cdot$
2	1	2	3	4	5	$\cdot$
3	1	3	6	10	15	$\cdot$
4	1	4	10	20	35	$\cdot$
5	1	5	15	35	70	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

n-й член m-й строки таблицы – обозначим его a_n^m – равен сумме $n+1$ первых членов предыдущей строки. Если p – простое число, то, как видно из таблицы,

$$\left|m\right|_{p^n} = a_n^m.$$

Пусть $n = p_1^s p_2^r$, где p_1, p_2 – различные простые числа, s, r – натуральные числа. Тогда

$$\left(\sum_{d|p_1^s} d\right)\left(\sum_{d|p_2^r} d\right) = \left(1 + p_1 + \ldots + p_1^s\right)\left(1 + p_2 + \ldots + p_2^r\right) = \sum_{d|n} d.$$

Отсюда выводим

$$\left|2\right|_n = \sum_{d|n}\left|1\right|_d = \left(\sum_{d|p_1^s}\left|1\right|_d\right)\left(\sum_{d|p_2^r}\left|1\right|_d\right) = \left|2\right|_{p_1^s}\left|2\right|_{p_2^r},$$

$$\left|3\right|_n = \sum_{d|n}\left|2\right|_d = \left(\sum_{d|p_1^s}\left|2\right|_d\right)\left(\sum_{d|p_2^r}\left|2\right|_d\right) = \left|3\right|_{p_1^s}\left|3\right|_{p_2^r},$$

$$\left|m\right|_n = \left|m\right|_{p_1^s}\left|m\right|_{p_2^r}.$$

Обобщая, выводим: если

$$n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_r^{s_r},$$

то

$$\left|m\right|_n = \left|m\right|_{p_1^{s_1}}\left|m\right|_{p_2^{s_2}} \ldots \left|m\right|_{p_r^{s_r}} = a_{s_1}^m a_{s_2}^m \ldots a_{s_r}^m.$$

Так как

$$a_n^m = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{n!} = \frac{[m]_n}{n!},$$

то

$$\varsigma^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} |m|_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[m]_{s_1}[m]_{s_2}\ldots[m]_{s_r}}{s_1!s_2!\ \ldots\ s_r!} x^n,$$

где $[m]_{s_i}$ – возрастающий факториал длины s_i, s_i – показатель степени простого числа в каноническом разложении числа n.

Матрицу, нулевая и первая строки которой соответственно 0 и 1, а n-я строка имеет вид

$$\frac{[x]_{s_1}[x]_{s_2}\ldots[x]_{s_r}}{s_1!s_2!\ \ldots\ s_r!},$$

обозначим $A\left|e^x\right|$. Тогда

$$A\left(e^{nx}\right) = \varsigma^{(n)},$$

$$A\left\langle e^x \right\rangle = \langle\langle\varsigma\rangle\rangle,$$

$$A\left\langle e^x - 1\right\rangle\left\langle x+1\right\rangle = \langle\langle\varsigma\rangle\rangle,$$

$$A = \langle\langle\varsigma\rangle\rangle\left\langle x-1\right\rangle\left\langle \log(1+x)\right\rangle,$$

$$A = \langle\langle\varsigma - x\rangle\rangle\left\langle \log(1+x)\right\rangle,$$

$$A = \langle\langle \log\circ\varsigma\rangle\rangle.$$

Таким образом, если $p_n(x)$ – n-я строка матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1}\langle\langle \log\circ\varsigma\rangle\rangle\left|e^x\right|,$$

то

$$p_0(x) = 0,\quad p_1(x) = 1,\quad \frac{p_n(x)}{n!} = \frac{[x]_{s_1}[x]_{s_2}\ldots[x]_{s_r}}{s_1!s_2!\ \ldots\ s_r!},$$

где

$$[x]_{s_i} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+s_i-1),$$

s_i – показатель степени простого числа в каноническом разложении числа n,

$$\varsigma^{(\beta)} = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[\beta]_{s_1} [\beta]_{s_2} \ldots [\beta]_{s_r}}{s_1! s_2! \ldots s_r!} x^n .$$

Последовательность коэффициентов ряда $\varsigma^{(-1)}$, рассматриваемая как функция, заданная на множестве натуральных чисел, называется функцией Мёбиуса, обозначается $\mu(n)$ и определяется следующим образом: если

$$n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_r^{s_r}$$

– каноническое разложение числа n, то

$$\mu(1) = 1,$$

$$\mu(n) = 0, \text{ если какое-либо } s_i > 1,$$

$$\mu(n) = (-1)^r, \text{ если все } s_i = 1.$$

Это соответствует нашему определению:

$$[-1]_{s_1} [-1]_{s_2} \ldots [-1]_{s_r} = 0 \quad \text{при } s_i > 1,$$

$$\left([-1]_1\right)^r = (-1)^r.$$

Обозначим:

$$\varsigma^{(-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) x^n, \quad \operatorname{logo}\varsigma = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda(n) x^n .$$

Согласно результатам предыдущего раздела,

$$\mu(n) = \sum_{m=1}^{r} (-1)^m \alpha_{(n,\, m)}, \quad \lambda(n) = \sum_{m=1}^{r} (-1)^{m+1} \frac{\alpha_{(n,\, m)}}{m}, \quad n > 1,$$

где r – число множителей в разложении n на простые множители,

$$\alpha_{(n,\ m)} = \sum \frac{m!}{m_2!m_3!\ \dots\ m_n!}, \quad \prod_{p=2}^{n} p^{m_p} = n,\ \sum_{p=2}^{n} m_p = m,$$

и суммирование ведется по всем разложениям числа n на m неединичных множителей.

Из определения полинома $\frac{p_n(x)}{n!}$ вытекает, что $\lambda(n) = 0$, если n не является степенью простого числа, так как в этом случае первый член полинома $\frac{p_n(x)}{n!}$, т.е. n-й строки матрицы $\langle\langle \log \circ \varsigma \rangle\rangle \left| e^x \right|$, равен нулю. Если $n = p^s$, где p – простое число, то первый член полинома $\frac{p_n(x)}{n!}$ равен $\frac{(s-1)!}{s!} = \frac{1}{s}$. Так как первый столбец матрицы $\langle\langle \log \circ \varsigma \rangle\rangle \left| e^x \right|$ совпадает с первым столбцом матрицы $\langle\langle \log \circ \varsigma \rangle\rangle$, то $\lambda(n) = \frac{1}{s}$, если $n = p^s$.

6

Обозначим

$$\left\langle x^n \right\rangle (c_i) = c\left(x^n \right),$$

где $c_0 = 1$. Свойство логарифма

$$\log c\left(x^n \right) = \left\langle x^n \right\rangle (\log c(x))$$

подсказывает, что $\left\| a_i \right\|$-алгебру можно рассматривать как алгебру логарифмов, представляя векторы a_i, b_i в виде

$$a_i = \log c(x),\ b_i = \log d(x).$$

Тогда

$$a_i \circ b_i = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \log c\left(x^n \right) = \log \prod_{n=1}^{\infty} c^{b_n}\left(x^n \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log d\left(x^n\right) = \log \prod_{n=1}^{\infty} d^{a_n}\left(x^n\right).$$

Если при этом $b_i = a_i^{(-1)}$, то

$$\prod_{n=1}^{\infty} c^{b_n}\left(x^n\right) = \prod_{n=1}^{\infty} d^{a_n}\left(x^n\right) = e^x.$$

n-й член вектора $c^{b_p}\left(x\right)$ обозначим $c_n^{b_p}$. Тогда по формуле Файна [4. стр.180], учитывая, что $c_0^{b_p} = 1$,

$$\prod_{n=1}^{\infty} c^{b_n}\left(x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n) x^n,$$

где

$$C(n) = \sum c_{m_1}^{b_1} c_{m_2}^{b_2} \dots c_{m_n}^{b_n}, \quad \sum_{p=1}^{n} p m_p = n,$$

и суммирование ведется по всем разбиениям числа n.

1. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
2. Риордан Д. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963.
3. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977.
4. Риордан Д. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982.