Франц Герман

Теорема о повороте перпендикуляра

Посвящаю удивительной
Марии Шаулин

Теорема:

Если преобразование $\alpha_O : A \xrightarrow{\alpha_O} A^*,\ B \xrightarrow{\alpha_O} B^*$ **является поворотом вокруг точки *O*, где** $OB \perp BA$**, то прямая *BB**, делит отрезок** AA^***, пополам.**

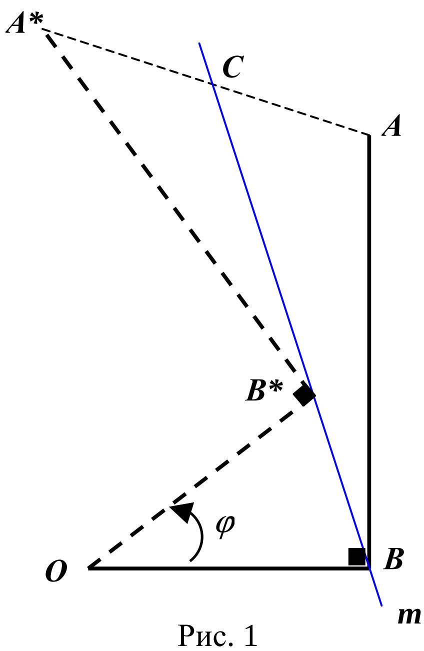

Рис. 1

Доказательство:

Сделаем чертёж (Рис. 1). Перпендикуляр ***OB*** повёрнут вокруг точки ***O*** на некоторый угол φ. Доказать, что прямая ***BB*≡m*** делит отрезок ***AA**** пополам, т. е. ***AC* = *CA****.

Введём систему координат так, как показано на Рис. 2

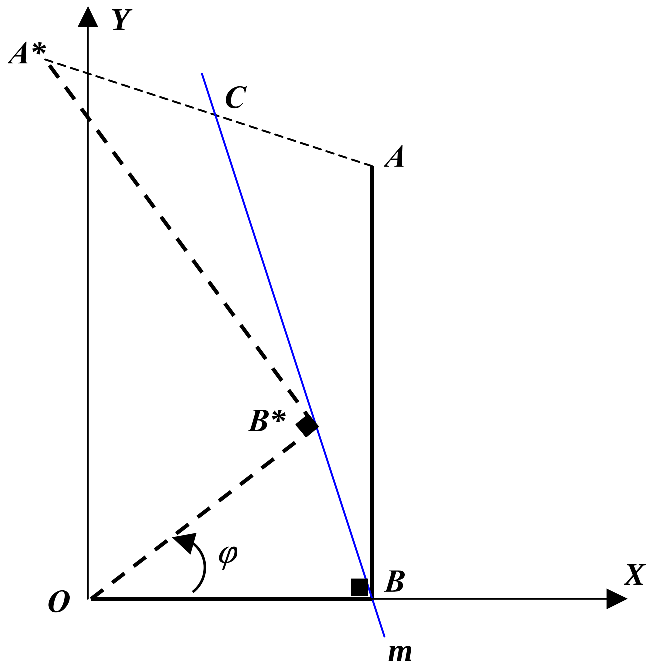

Рис. 2

Не нарушая общности примем координаты точек ***B*** и ***A*** как (1, 0) и (1, *a*) соответственно. Тогда координвты образов этих точек, согласно формулам преобразования поворота,

$$\begin{cases} X^* = X \cdot Cos(\varphi) - Y \cdot Sin(\varphi) \\ Y^* = X \cdot Sin(\varphi) + Y \cdot Cos(\varphi) \end{cases}$$

будут иметь значения: $B^*(Cos(\varphi), Sin(\varphi))$, $A^*(Cos(\varphi) - aSin(\varphi), Sin(\varphi) + aCos(\varphi))$.

Определим координаты точки *C*:

$$X_C = \frac{1 + Cos(\varphi) - aSin(\varphi)}{2}, \qquad Y_C = \frac{a + Sin(\varphi) + aCos(\varphi)}{2}.$$

Вычислим определитель составленный из координат точек ***B, B**** и ***C***.

$$\det(m) = \begin{vmatrix} \frac{1 + Cos(\varphi) - aSin(\varphi)}{2} & \frac{a + Sin(\varphi) - aCos(\varphi)}{2} & 1 \\ Cos(\varphi) & Sin(\varphi) & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{Sin(\varphi)(1 + Cos(\varphi) - aSin(\varphi))}{2} +$$

$$+ \frac{Sin(\varphi)(1 + Cos(\varphi) - aSin(\varphi))}{2} - Sin(\varphi) - \frac{Cos(\varphi)(a + Sin(\varphi) - aCos(\varphi))}{2} = 0$$

Определитель равен нулю. Следовательно точки *B*, *B** и *C* лежат на одной прямой.

Теорема доказана.