УДК 537.8

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ И АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

В.В. Сидоренков

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Показано, как на основе первичных соотношений электромагнетизма - закона Кулона взаимодействия неподвижных электрических точечных зарядов и закона сохранения электрического заряда цепочкой последовательных физико-математических рассуждений можно построить систему дифференциальных уравнений Максвелла классической электродинамики.

В курсе общей физики при изложении природы электричества [1] концепция электромагнитного поля является центральной, поскольку посредством такого поля реализуется один из видов фундаментального взаимодействия разнесенных в пространстве материальных тел. Физические свойства указанного поля математически представляются системой функционально связанных между собой уравнений в частных производных первого порядка, первоначальная версия которых была получена во второй половине XIX века Дж.К. Максвеллом [2] обобщением эмпирических фактов. В структуре этих уравнений, описывающих поведение электромагнитного поля в неподвижной среде, заложена основная аксиома классической электродинамики - неразрывное единство переменных во времени электрического и магнитного полей. В современной форме такая система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\text{(a)}\ \ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \text{(b)}\ \ \mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho,$$

$$\text{(c)}\ \ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \qquad \text{(d)}\ \ \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0. \qquad (1)$$

Здесь векторные поля: электрической $\boldsymbol{E}$ и магнитной $\boldsymbol{H}$ напряженности, соответственно, электрической $\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ и магнитной $\boldsymbol{B} = \mu\mu_0\boldsymbol{H}$ индукции, а также плотности электрического тока $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$; $\varepsilon\varepsilon_0$ и $\mu\mu_0$ - абсолютные электрическая и магнитная проницаемости, σ - удельная электрическая проводимость материальной среды, ρ - объемная плотность стороннего электрического заряда.

Покажем, как на основе первичных базовых законов электромагнетизма - *закона Кулона* взаимодействия неподвижных электрических точечных зарядов

$$\boldsymbol{F}_{Кул} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

и *закона сохранения электрического заряда* [1]

$$\operatorname{div}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

цепочкой последовательных физико-математических рассуждений можно построить систему электродинамических уравнений Максвелла (1). Представляется, что логика таких рассуждений позволит читателю яснее и глубже понять сущность корпускулярно-полевого дуализма природы электричества.

Фундаментальность закона Кулона (2) состоит в том, что его посредством описывается силовое взаимодействие разнесенных в пространстве неподвижных электрически заряженных материальных тел, где для изучения следствий такого взаимодействия вводят понятие электрического поля в виде *напряженности – силы Кулона на единицу заряда*: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}_{Кул}/q_0$, где q_0 - пробный точечный заряд. Топология структуры электрического поля точечного заряда $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \sim 1/r^2$ такова, что интеграл от этой функции по сфере любого радиуса константен: $(1/r^2)\cdot 4\pi\ r^2 = 4\pi$, а при использовании понятия телесного угла несложно убедиться: *поток вектора поля электрической индукции* (*смещения*) $\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ *через произвольную замкнутую поверхность S тождественно равен суммарному стороннему заряду* q *в объеме* V_S *, охваченном этой поверхностью*: $\Phi^e = \oint_S \boldsymbol{D}d\boldsymbol{S} = \int_{V_S} \rho dV = q$.

Такие рассуждения называют *электростатической теоремой Гаусса*. Здесь надо иметь в виду, что равенство нулю стороннего заряда, соответственно, электрического потока: $q \equiv \Phi^e = 0$, отнюдь не означает отсутствие электрического поля в этой области пространства, поскольку электрические заряды бывают положительными и отрицательными, и указанное поле может создаваться электронейтральными источниками, например, электрическими диполями. Это свойство электростатического поля качественно отличает его от ньютоновского поля тяготения, где источники такого поля – гравитирующие массы имеют один знак. В системе электродинамических дифференциальных уравнений (1) теорема Гаусса представлена (см. теорему Гаусса-Остроградского) соотношением (1b), описывающим результат электрической поляризации среды, где при электронейтральности ($\rho = 0$) среды (1b) имеет вид $\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0$.

Воспользуемся теперь другим первичным законом электромагнетизма - *законом сохранения электрического заряда* (3), структурно представляющим собой уравнение непрерывности. Закон гласит: *изменение заряда в данной точке пространства $\partial\rho/\partial t$ единственно возможно лишь за счет транспорта зарядов извне* $\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}$, так как, согласно теореме Гаусса-Остроградского, дивергенция - это объемная плотность потока векторного поля в данной точке. Тогда подстановка в закон (3) уравнения (1b) дает формулу $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{j} + \partial\boldsymbol{D}/\partial t) = 0$. И с учетом того, что для любого векторного поля $\mathrm{divrot}\,\boldsymbol{a} = 0$, получаем еще одно уравнение обсуждаемой здесь системы: $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \partial\boldsymbol{D}/\partial t$ (1c). Это уравнение обычно называют законом полного тока: *электрические токи проводимости и смещения порождают вихревое магнитное поле, силовые линии векторов напряженности $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ которого охватывают линии этих токов.*

Итак, в области существования движущихся зарядов и переменных во времени электрических полей $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} \neq 0$, то есть в уравнении (1c) функция $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ является чисто вихревой, а потому для математического уточнения такой топологии магнитного поля, согласно определению дивергенции, введем соотношение $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$. Тем самым получим следующее уравнение системы (1) – уравнение (1d). Данное дивергентное уравнение $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$ способно описать не только вихревые свойства функции $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$, но и ее потенциальную версию, когда в точках отсутствия источников поля $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = 0$. В этом случае уравнение (1d) аналогично уравнению (1b) и математически представляет результат магнитной поляризации материальной среды. Комментируя физическое содержание такого уравнения, обычно говорят, что оно наглядно иллюстрирует отсутствие в Природе сторонних магнитных зарядов, подобных электрическим, при этом, входя в противоречие, безосновательно называют $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$ *теоремой Гаусса магнитного поля*, хотя в рамках логики уравнений Максвелла базы для этой теоремы - *магнитного закона Кулона* принципиально не существует.

Наконец, частным дифференцированием по времени $\partial/\partial t$ уравнения (1d) получаем на основе $\mathrm{divrot}\,\boldsymbol{a} = 0$ адекватное с учетом знака *закону электромагнитной индукции Фарадея* уравнение (1a), последнее в системе (1). Итак, *изменяющееся во времени поле магнитной индукции порождает в данной точ-*

ке пространства вихревое электрическое поле. Ввиду того, что в уравнении (1a) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} \neq 0$, то функция поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ является вихревой, и эту топологию способно уточнить, согласно вышесказанному о дивергенции, уже полученное нами ранее уравнение (1b) в виде $\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0$. Как видим, дивергентные уравнения (1b) и (1d) как математически, так и физически весьма содержательны.

И это только то, что лежит на поверхности. А если взглянуть глубже, то уравнения $\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0$ и $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$ содержат сведения о полях электрического $\boldsymbol{A}^e$ и магнитного $\boldsymbol{A}^m$ векторных потенциалов, связанных с электрической - $\boldsymbol{D} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}^e$ и магнитной - $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}^m$ поляризациями. На сегодня установлено [3], что векторные потенциалы – полноправные физически значимые поля, являющиеся собственными первичными полями микрочастиц. При этом дуализм физических характеристик материи в электромагнетизме реализуется двумя корпускулярно-полевыми парами: $q \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^e$ с единицами измерения в системе СИ *Кулон* $\Leftrightarrow$ *Кулон/метр* и $h/2e \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^m$ с единицами измерения (*Джоуль·секунда*)/*Кулон* $\Leftrightarrow$ (*Джоуль·секунда*)/(*Кулон·метр*), где h - постоянная Планка, e - заряд электрона. Учет этого обстоятельства позволяет существенно углубить и кардинально модернизировать концептуальные основы классической электродинамики [3], где, например, обсуждаемая здесь система электродинамических уравнений Максвелла будет только лишь рядовым частным следствием.

Однако вернемся к уравнениям системы (1). Убедимся, что данная система замкнута и может быть представлена в виде математической задачи Коши - решение уравнений с заданными начальными условиями. Для этого, прежде всего, надо показать, что уравнение (1d) является следствием уравнения (1a), а уравнение (1b) есть следствие уравнения (1c). Вообще говоря, это уже установлено в наших рассуждениях при построении уравнений системы (1), и все же проделаем обратное в явном виде. Итак, возьмем дивергенцию от (1a):

$$\mathrm{divrot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\boldsymbol{B} \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{div}\boldsymbol{B} = const \neq f(t).$$

Поскольку уравнение (1d) $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$ удовлетворяется при любых t, то оно верно и для $t = 0$. Таким образом, уравнение (1d) действительно является начальным условием для уравнения (1a).

Аналогичная процедура с уравнением (1c) и сравнение этого результата с уравнением непрерывности (3) дает цепочку:

$$\mathrm{divrot}\boldsymbol{H} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\boldsymbol{D} - \rho) = 0 \;\Rightarrow\; (\mathrm{div}\boldsymbol{D} - \rho) = const \neq f(t).$$

А так как уравнение (1b) $\mathrm{div}\boldsymbol{D} - \rho = 0$ справедливо при любых t, то оно верно и для $t = 0$. Как видим, (1b) - это начальное условие для уравнения (1c). Кстати, по этой причине роторные уравнения (1a) и (1c) часто называют первым и вторым фундаментальными уравнениями классической электродинамики.

В итоге с учетом уравнения непрерывности (3) *система уравнений Максвелла (1) действительно замкнута* – 16 скалярных уравнений: (1a), (1c), (3) - 7 уравнений и материальные соотношения – 9 уравнений для нахождения 16 скалярных функций: компонент векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{j}$ и плотности заряда ρ.

Важнейшим фундаментальным следствием уравнений Максвелла является тот факт, что $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ компоненты электромагнитного поля распространяются в пространстве в виде волн. Например, волновое уравнение для поля электрической напряженности $\boldsymbol{E}$ сравнительно просто получить, если взять «ротор» от уравнения (1a) и подставить в него уравнение (1c):

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} - \Delta\boldsymbol{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = -\sigma\mu\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Аналогично получается волновое уравнение для поля магнитной напряженности $\boldsymbol{H}$, структурно тождественное уравнению (4). Видно, что скорости распространения обеих компонент волны, как и должно быть, равны и определяются лишь электрическими и магнитными параметрами материальной среды: ε, μ и σ, в частности, в отсутствие поглощения ($\sigma = 0$) скорость $\mathrm{v} = 1/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$.

С целью ответа на вопрос, что и как переносят эти волны, воспользуемся уравнениями Максвелла (1), являющимися в сущности первичными уравнениями электромагнитной волны, откуда на основе уравнений (1a) и (1c) получаем *закон сохранения энергии* в форме так называемой теоремы Пойнтинга:

$$\boldsymbol{H}\mathrm{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \mathrm{div}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}] = -(\boldsymbol{j},\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \quad (5)$$

Видно, что поступающий извне в данную точку среды поток электромагнитной энергии, определяемый вектором Пойнтинга $[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]$, идет на компенсацию тепловых (джоулевых) потерь в процессе электропроводности и изменение электрической и магнитной энергий, либо наоборот - эти физические процессы вызывают излучение наружу потока электромагнитной энергии. Уравнение энергетического баланса (5) показывает, что излучение вовне потока энергии, когда $\mathrm{div}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}] > 0$, возникает при джоулевых потерях $(\boldsymbol{j},\boldsymbol{E}) < 0$, то есть за счет работы источника ЭДС, где векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{j}$ - антипараллельны. Аналогично, при $\operatorname{div}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}] > 0$ другие слагаемые в (5) меньше нуля: энергии полей убывают.

Согласно уравнениям (1а) и (1с), вектор плотности потока электромагнитной энергии $[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]$, отличен от нуля только там, где одновременно присутствуют электрическая и магнитная компоненты поля, векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ которых неколлинеарны. Следовательно, переносящая $[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]$ энергию *электромагнитная волна является поперечной*, так как реализуется взаимно ортогональными $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ компонентами. При этом несложно убедиться [1], что уравнения (1) описывают электромагнитную волну, колебания $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ компонент которой *синфазны* между собой. Однако синфазность колебаний этих двух компонент принципиально не отвечает обычному механизму переноса энергии волнами произвольной физической природы, когда во всех точках пространства происходит взаимное преобразование во времени потенциальной (в нашем случае, электрической) энергии в кинетическую (магнитную) энергию, и наоборот.

Упрощенно этот процесс можно пояснить ради наглядности в точке на примере колебаний физического маятника, когда такой вид движения реализуется при сдвиге фазы колебаний смещения и скорости маятника на $\pi/2$, то есть благодаря совместному обмену кинетической и потенциальной энергиями, при неизменной во времени полной энергии незатухающих колебаний. Следовательно, и в случае волны перенос ею энергии в среде без потерь возможен только при сдвиге фазы колебаний между компонентами на $\pi/2$, причем поток энергии не зависит от времени и точек пространства. Однако в теории Максвелла электромагнитные волны с такими характеристиками не существуют.

Интересно, но общепринятая логика обсуждения переноса электромагнитной энергии такова, что проблемы здесь как бы и нет - всем все понятно. Действительно, из решения уравнений системы (1) для волновых амплитуд $H_m = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 / \mu\mu_0} E_m$ формально, но абсолютно строго следует $\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2/2 = \mu\mu_0 H_m^2/2$ - *закон сохранения энергии*. Вопрос вроде бы исчерпан, поскольку однозначно доказано, что электрическая и магнитная энергии, переносимые волнами соответствующих полевых компонент, в точности равны. Правомерность такой методики, которую никто и не оспаривает, «просветители» аргументируют тем, что волновой перенос электромагнитной энергии реально наблюдается, а само физическое явление всесторонне используется во многих областях жизни современного общества. Именно так эта проблема излагается учащимся. Но ведь это далеко не тот ответ на вопрос: как же все-таки эта энергия переносится?

В качестве конструктивного замечания отметим, что хотя $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ компоненты электромагнитной волны распространяются только совместно и их энергии равны, но при синфазности колебаний этих компонент какой-либо связи между энергиями быть не может. Более того, из уравнений Максвелла (1) следует, что в случае электро- и магнитостатики указанные энергии независимы в принципе. В итоге приходим к парадоксальному выводу о независимом, но неразрывно совместном существовании *электрической* и *магнитной энергий*, которые, правда, непонятно как переносятся в пространстве, поскольку нет второй векторной компоненты вектору $\boldsymbol{E}$, соответственно, $\boldsymbol{H}$ для реализации потоковых векторов этих видов энергии, аналогичных потоковому вектору Пойнтинга $[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]$. Что же касается электромагнитной волны, то мы убедились в ее специфичности: с одной стороны, перенос электромагнитной энергии реален, а с другой, синфазность колебаний полевых компонент волны делает невозможным перенос такой энергии обычным образом. Но тогда становится неясным, казалось бы, очевидное каждому понятие *электромагнитной энергии*, а также каков реальный механизм волнового переноса всех этих видов энергии?

Таким образом, ситуация с выяснением физического механизма переноса энергии волнами электромагнитного поля объективно существует, она чрезвычайно актуальна и для ее разрешения требуется весьма нестандартный подход. Информация: эта насущная проблема в настоящее время активно, а главное успешно исследуется и находится на заключительном этапе ее решения [3].

Материал данного сообщения может быть полезен студентам при самообразовании, а преподавателям для занятий по курсам общей физики, классической электродинамики и сопутствующим им техническим дисциплинам.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. М.: Наука, 1977.
2. Максвелл Дж.К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. I и II. М.: Наука, 1989.
3. Сидоренков В.В. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2006. № 1. С. 28-37; // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2007. Т. 3. № 11. С. 75-82; // Необратимые процессы в природе и технике: Сборник научных трудов. Вып. 3. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. С. 56-83; // **http://new-idea.kulichki.net/?mode=physics** (от 08.11.09г.).