Е. В. Бурлаченко

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

1

Согласно общей теории относительности и астрономическим данным, существует система координат, в которой метрика пространства-времени принимает вид:

$$ds^2 = R(t)\,d\sigma^2 - c^2dt^2,$$

$$d\sigma^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + k\,\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{4}\right)^2}, \quad k = 1,\,0,-1, \tag{1}$$

$R(t)$ – функция времени, называемая масштабным фактором.

Трехмерное подпространство пространства-времени, образованное пространственными осями координат, принято называть пространством. Точкам пространства с фиксированными координатами соответствуют скопления галактик, или короче, галактики. В рассматриваемой системе координат все галактики имеют одинаковый возраст, поэтому время t называется абсолютным, или космическим временем.

Расстояние между двумя пространственными точками A и B при $R(t) = 1$ обозначим r^{AB}. В любой другой момент времени расстояние между A и B равно

$$r_t^{AB} = R(t)\,r^{AB},$$

так что

$$r_{t_1}^{AB} \big/ r_{t_2}^{AB} = R(t_1)\big/R(t_2).$$

Аналогичное равенство справедливо и для длины волны фотона:

$$\lambda_{t_1} \big/ \lambda_{t_2} = R(t_1)\big/R(t_2).$$

Непривычной особенностью системы координат, связанной с метрикой (1), является то, что она не позволяет выражать пространственные расстояния в световых единицах времени. Пусть в момент t_A свет испускается точкой A, а в момент t_B принимается точкой B. В это время расстояние между A и B равно $R(t_B)r^{AB}$. Т.е. за время $t_B - t_A$ свет проходит определенное расстояние. Однако,

$$R(t_B)r^{AB} \neq c(t_B - t_A).$$

Чтобы в этом убедиться, представим метрику (1) в виде

$$ds^2 = U^2(\tau)\left(d\sigma^2 - c^2 d\tau^2\right),$$

где

$$d\tau = \frac{dt}{R(t)}, \quad U(\tau) = R(t).$$

Уравнение распространения света принимает вид

$$r^{AB} = c(\tau_B - \tau_A),$$

или $$(2)$$

$$r^{AB} = c\int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{R(t)}.$$

Отсюда видно, что пройденный светом путь и время, затраченное на его преодоление, связаны определенной зависимостью, но не линейной.

Обозначим

$$c\int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{R(t)} = F(t_B) - F(t_A).$$

Для любого t_A (момент испускания света точкой A) или для любого t_B (момент прихода света в точку B) выполняется равенство

$$F(t_B) - F(t_A) = r^{AB} = const.$$

Метрику (1) впервые получил Александр Фридман, решая уравнения Эйнштейна для однородной и изотропной Вселенной. Но оказывается, для вывода метрики достаточно одних условий однородности и изотропности [1], [2]. Для выполнения этих условий трехмерное пространство Вселенной должно быть пространством постоянной кривизны. В свою очередь, трехмерное пространство Лобачевского (пространство постоянной отрицательной кривизны) можно отождествить с релятивистским пространством скоростей [3], [4], [5], т. е. с пространством инерциальных систем отсчета специальной теории относительности. Последнее обстоятельство не может быть случайным и должно учитываться при отыскании конкретного вида метрики (1).

Метрика пространства-времени (пространства Минковского)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

допускает две возможные реализации временной оси координат – действительную и мнимую:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dw^2, \quad w = ct;$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2, \quad w = ict, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Равенство

$$v/c = \mathrm{th}\,\varphi$$

устанавливает соответствие между функциями специальной теории относительности и гиперболическими функциями:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \mathrm{ch}\,\varphi, \quad \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \mathrm{sh}\,\varphi,$$

$$\frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}} = e^{\varphi}.$$

Равенство

$$v/c = -i\,\mathrm{tg}\,\vartheta, \quad \vartheta = i\varphi$$

устанавливает соответствие

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \cos\vartheta, \quad \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -i\sin\vartheta.$$

Таким образом, две возможные системы представления пространства-времени сязаны формулами перехода:

$$\mathrm{ch}\,\varphi = \cos\vartheta, \quad \mathrm{sh}\,\varphi = -i\sin\vartheta,$$

$$\operatorname{th}\varphi = -i\operatorname{tg}\tilde{\varphi}, \quad \operatorname{cth}\varphi = i\operatorname{ctg}\tilde{\varphi}.$$

Минусом мнимой системы представления является то, что она не находит применения в общей теории относительности; плюсом является то, что она позволяет рассматривать с общей точки зрения пространства постоянной кривизны, как положительной, так и отрицательной. Каждая точка пространства-времени, расположенная во внутренней области изотропного (светового) конуса, находится на мнимом расстоянии от начала координат. Гиперповерхность

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = -R^2$$

можно рассматривать как гиперсферу мнимого радиуса $\tilde{R} = iR$. Формулы перехода между гиперболическими и тригонометрическими функциями обеспечивают непротиворечивость этой точки зрения.

Выбор параметра $k = 1$ в метрике (1) привлекателен тем, что в этом случае трехмерное пространство Вселенной становится замкнутым. Основная форма его метрики получается следующим образом. В четырехмерном евклидовом пространстве с метрикой

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$$

выделим сферу

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2.$$

Внутренняя метрика сферы проявляется при переходе от декартовых координат к сферическим с учетом условия $R = const$:

$$x = R\sin\varphi\sin\theta\cos\phi, \quad y = R\sin\varphi\sin\theta\sin\phi,$$

$$z = R\sin\varphi\cos\theta, \quad w = R\cos\varphi,$$

$$dx = R\left(\cos\varphi\sin\theta\cos\phi d\varphi + \sin\varphi\left(\cos\theta\cos\phi d\theta - \sin\theta\sin\phi d\phi\right)\right),$$

$$dy = R\left(\cos\varphi\sin\theta\sin\phi d\varphi + \sin\varphi\left(\cos\theta\sin\phi d\theta + \sin\theta\cos\phi d\phi\right)\right),$$

$$dz = R\left(\cos\varphi\cos\theta d\varphi - \sin\varphi\sin\theta d\theta\right), \quad dw = -R\sin\varphi d\varphi,$$

$$d\sigma^2 = R^2\left(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right).$$

Но возникает вопрос: что это за четырехмерное пространство, трехмерной поверхностью в котором является прострнство Вселенной? Обычно отвечают, что это вспомогательный образ, существующий лишь в нашем воображении: внутренняя геометрия пространства Вселенной самодостаточна, и возможность представлять его в виде трехмерной сферы не имеет отношения к делу. Такое объяснение не убедительно: при построении модели Вселенной, понимаемой как мир в целом, не должно оставаться не только лишних деталей, но и лишних возможностей. Поэтому будем представлять пространство Вселенной как гиперповерхность («сферу») в реальном пространстве-времени:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2, \quad w = ict,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \tilde{R}^2, \quad \tilde{R} = iR;$$

$$d\sigma^2 = \tilde{R}^2\left(d\tilde{\varphi}^2 + \sin^2\tilde{\varphi}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right) =$$

$$= R^2\left(d\varphi^2 + \mathrm{sh}^2\varphi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right), \quad \tilde{\varphi} = i\varphi.$$

«Сфера» состоит из двух «полусфер», пересекающих временную ось в противоположных направлениях от начала координат. Чтобы выделить «полусферу» с положительным направлением времени, спроектируем точки «сферы» из центра на касательную гиперплоскость $w = \tilde{R}$, $t = R/c$, $R > 0$. При этом две диаметрально противоположные точки «сферы» спроектируются на одну и ту же точку гиперплоскости. Данную операцию можно рассматривать и как преобразование координат (координаты точек экватора «сферы» уходят в бесконечность), и как отображение «сферы» на трехмерное евклидово подпространство пространства-времени [6] (в этом случае следует пользоваться понятиями проективной геометрии). Отметим, что проекцию «сферы» можно также рассматривать как пространство лучей, расположенных во внутренней области изотропного конуса пространства-времени; в свою очередь, каждый луч можно отождествить с инерциальной системой отсчета специальной теории относительности.

Пространственные координаты проекции точки «сферы» с координатами x, y, z, w обозначим соответственно v_x, v_y, v_z (временная координата проекции равна $\tilde{R}$). Так как точка «сферы» и ее проекция расположены на одной прямой, то

$$\frac{v_x}{x} = \frac{v_y}{y} = \frac{v_z}{z} = \frac{\tilde{R}}{w},$$

$$v_x = \frac{\tilde{R}}{w}x, \quad v_y = \frac{\tilde{R}}{w}y, \quad v_z = \frac{\tilde{R}}{w}z,$$

$$x = \frac{w}{\tilde{R}}v_x, \quad y = \frac{w}{\tilde{R}}v_y, \quad z = \frac{w}{\tilde{R}}v_z.$$

Так как

$$w = \frac{\tilde{R}^2}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + \tilde{R}^2}},$$

то

$$x = \frac{\tilde{R}v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + \tilde{R}^2}}, \quad y = \ldots, \quad z = \ldots,$$

$$dx = \frac{\tilde{R}\left(dv_x\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + \tilde{R}^2\right) - v_x\left(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z\right)\right)}{\sqrt[3]{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + \tilde{R}^2}},$$

$$dy = \ldots, \qquad dz = \ldots,$$

$$dw = \frac{\tilde{R}^2\left(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z\right)}{\sqrt[3]{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + \tilde{R}^2}}.$$

Подставляя новые выражения для dx^2, dy^2, dz^2, dw^2 в формулу линейного элемента, получаем метрику пространства Лобачевского в «эллиптических» координатах (назовем их так по аналогии со «сферическими» координатами):

$$d\sigma^2 = \frac{\tilde{R}^2}{\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + \tilde{R}^2\right)^2}\left(\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + \tilde{R}^2\right)\left(dv_x^2 + dv_y^2 + dv_z^2\right) - \right.$$

$$\left. -\left(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z\right)^2\right),$$

или

$$d\sigma^2 = \frac{R^2}{\left(R^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2\right)^2}\left(\left(R^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2\right)\left(dv_x^2 + dv_y^2 + dv_z^2\right) + \right.$$

$$\left. + \left(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z\right)^2\right).$$

Приравняем $R = c$ и перейдем к сферическим координатам:

$$v_x = v\sin\theta\cos\phi, \quad v_y = v\sin\theta\sin\phi,$$

$$v_z = v\cos\theta, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$dv_x = \sin\theta\cos\phi dv + v\left(\cos\theta\cos\phi d\theta - \sin\theta\sin\phi d\phi\right),$$

$$dv_y = \sin\theta\sin\phi dv + v\left(\cos\theta\sin\phi d\theta + \sin\theta\cos\phi d\phi\right),$$

$$dv_z = \cos\theta dv - v\sin\theta d\theta,$$

$$d\sigma^2 = c^2\left(\frac{c^2 dv^2}{\left(c^2 - v^2\right)^2} + \frac{v^2}{c^2 - v^2}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right).$$

Если

$$v/c = \mathrm{th}\varphi,$$

то

$$dv = \frac{c d\varphi}{\mathrm{ch}^2\varphi}, \quad \mathrm{ch}\varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad \mathrm{sh}\varphi = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$d\sigma^2 = c^2\left(d\varphi^2 + \mathrm{sh}^2\varphi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right).$$

Возможны также следующие преобразования координат:

$$\mathrm{sh}\varphi = r, \quad d\varphi = \frac{dr}{\mathrm{ch}\varphi},$$

$$d\sigma^2 = c^2\left(\frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right);$$

$$2\,\mathrm{th}\frac{\varphi}{2} = r, \quad d\varphi = \mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}dr,$$

$$\mathrm{sh}\,\varphi = 2\,\mathrm{sh}\frac{\varphi}{2}\mathrm{ch}\frac{\varphi}{2} = 2\,\mathrm{th}\frac{\varphi}{2}\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2} = \left(1 - \mathrm{th}^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-1},$$

$$d\sigma^2 = c^2\left(\frac{dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)}{\left(1 - r^2/4\right)^2}\right),$$

или в координатах x, y, z; $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$:

$$d\sigma^2 = c^2\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 - \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{4}\right)^2}\right).$$

Известно, что пространство постоянной положительной кривизны может быть сферическим или эллиптическим, получающимся из сферического путем отождествления диаметрально противоположных точек сферы. Как видим, этот факт имеет прямое отношение к рассматриваемой задаче. Вопрос, почему при проектировании сферы на плоскость форма линейного элемента сохраняется, вскрывает взаимосвязь между геометриями Евклида, Римана и Лобачевского, основанную на принципах проективной геометрии [5], [7]. Несмотря на впечатляющую эффективность своих методов, проективная геометрия до сих пор не нашла применения в физике. Но, вероятно, язык проективной геометрии предназначен для космологии с ее «сингулярностью», «скрытой массой» и другими трудновыразимыми понятиями.

2

Инерциальную систему отсчета в пространстве Минковского для краткости назовем И-системой; систему координат, связанную с метрикой (1), назовем космологической, или К-системой. Трехмерное пространство Лобачевского будем рассматривать как пространство инерциальных систем отсчета, которые свяжем с галактиками, удаляющимися друг от друга в И-системе по закону Хаббла:

$$v = Hr = r/t_H ,$$

где v – скорость удаления галактики он начала системы отсчета, r – расстояние от начала системы отсчета до галактики, H – постоянная Хаббла, t_H – время, прошедшее после Большого Взрыва, т. е. возраст Вселенной, или настоящий момент времени.

Систему отсчета свяжем с нашей Галактикой. Пусть в настоящий момент t_H мы регистрируем свет, испущенный галактикой, удаляющейся от нас со скоростью v. Входящее в закон Хаббла рвсстояние r разобьем на две составляющие:

$$r = r_н + r_н v/c,$$

где $r_н$ – наблюдаемое расстояние, т. е. местоположение галактики в момент испускания света, $r_н v/c$ – расстояние, на которое галактика успевает удалиться за время прохождения светом наблюдаемого расстояния. Так как

$$r_н = r - r_н v/c = \frac{vt_H}{1+v/c},$$

то момент испускания света галактикой в нашей И-системе равен

$$t_и = t_H - r_н/c = t_H - \frac{vt_H}{(1+v/c)c} = \frac{t_H}{1+v/c}.$$

Момент этого же события в К-системе, т. е. возраст галактики в момент испускания света, связан с $t_и$ релятивистским множителем:

$$t_к = t_и\sqrt{1-v^2/c^2} = t_H\,\frac{\sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c}}.$$

Нашу галактику обозним буквой H; галактику, удаляющуюся от нас со скоростью v_A, обозначим буквой A; момент мспускания света галактикой A в К-системе обозначим t_A. Тогда

$$\frac{t_H}{t_A} = \frac{\sqrt{1+v_A/c}}{\sqrt{1-v_A/c}} = \frac{\sqrt{c+v_A}}{\sqrt{c-v_A}}.$$

В пространстве Лобачевского с метрикой

$$d\sigma^2 = \frac{c^2 dv^2}{\left(c^2 - v^2\right)^2} + \frac{v^2}{c^2 - v^2}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) =$$

$$= d\varphi^2 + \mathrm{sh}^2\varphi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right), \quad v/c = \mathrm{th}\varphi$$

расстояние между началом координат и точкой A определяется интегралом

$$\int_0^{v_A} \frac{c\,dv}{c^2 - v^2} = \ln\frac{\sqrt{c + v_A}}{\sqrt{c - v_A}}.$$

Если в метрике (1) $k = -1$, и наша Галактика находится в начале пространственных координат, то из формулы (2) выводим:

$$r^{AH} = c\int_{t_A}^{t_H} \frac{dt}{R(t)} = \ln\frac{\sqrt{c + v_A}}{\sqrt{c - v_A}} = \ln t_H - \ln t_A,$$

$$R(t) = ct.$$

Таким образом, метрика (1) принимает вид

$$ds^2 = c^2 t^2\left(d\varphi^2 + \mathrm{sh}^2\varphi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right) - c^2 dt^2.$$

Оказывается, найденная метрика связана с метрикой пространства Минковского в форме

$$ds^2 = dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) - c^2 d\tau^2$$

преобразованием координат [2]:

$$r = ct\,\mathrm{sh}\varphi, \quad \tau = t\,\mathrm{ch}\varphi,$$

$$dr = c\left(\mathrm{sh}\varphi dt + t\,\mathrm{ch}\varphi d\varphi\right), \quad d\tau = \mathrm{ch}\varphi dt + t\,\mathrm{sh}\varphi d\varphi;$$

или в «эллиптических» координатах [8]:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 d\tau^2,$$

$$x = \frac{ctv_x}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad y = \frac{ctv_y}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad z = \frac{ctv_z}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$\tau = \frac{ct}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

$$dx = \frac{cv_x dt}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{ct\left(dv_x\left(c^2 - v^2\right) + v_x\left(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z\right)\right)}{\sqrt[3]{c^2 - v^2}},$$

$$dy = \ldots, \quad dz = \ldots,$$

$$d\tau = \frac{cdt}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{ct\left(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z\right)}{\sqrt[3]{c^2 - v^2}},$$

$$ds^2 = \frac{c^2 t^2}{\left(c^2 - v^2\right)^2}\Big(\left(c^2 - v^2\right)\left(dv_x^2 + dv_y^2 + dv_z^2\right) +$$

$$+\left(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z\right)^2\Big) - c^2 dt^2.$$

Отметим равенства:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2\tau^2 = -c^2 t^2,$$

$$\frac{v_x}{x} = \frac{v_y}{y} = \frac{v_z}{z} = \frac{1}{\tau}.$$

Т. е. v_x, v_y, v_z – это координаты точек пересечения лучей, заполняющих изотропный конус, с гиперплоскостью, временная координата которой равна ic.

Отметим четкость разделения дифференциалов на пространственную и временную составляющие:

$$dx = d\left(t_x\right) + d\left(v_x\right), \quad dy = d\left(t_y\right) + d\left(v_y\right),$$

$$dz = d(t_z) + d(v_z), \qquad d\tau = d(t) + d(v),$$

$$d(v_x)^2 + d(v_y)^2 + d(v_z)^2 - c^2 d(v)^2 =$$

$$= \frac{c^2 t^2}{\left(c^2 - v^2\right)^2}\left(\left(c^2 - v^2\right)\left(dv_x^2 + dv_y^2 + dv_z^2\right) +\right.$$

$$\left. + \left(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z\right)^2\right),$$

$$d(t_x)^2 + d(t_y)^2 + d(t_z)^2 - c^2 d(t)^2 = -c^2 dt^2,$$

$$d(t_x)d(v_x) + d(t_y)d(v_y) + d(t_z)d(v_z) - c^2 d(t)d(v) = 0.$$

Подобное разделение дифференциалов происходит при переходе от декартовых координат евклидова пространства к сферическим. Действительно, найденная метрика в двух ее формах – не что иное, как метрика пространства Минковского в «сферических» и, как мы убедились, в «эллиптических» координатах. Чтобы убедиться в первой части утверждения, рассмотрим трехмерный случай:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dw^2, \quad w = ic\tau,$$

$$x^2 + y^2 + w^2 = r^2, \quad r = ict,$$

$$x = r\sin\vartheta\cos\theta, \quad y = r\sin\vartheta\sin\theta,$$

$$w = r\cos\vartheta, \quad \vartheta = i\varphi.$$

Если параметр t фиксирован, при переходе к «сферическим» координатам проявляется метрика двухмерного пространства Лобачевского:

$$ds^2 = r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\theta^2\right) = c^2 t^2\left(d\varphi^2 + \mathrm{sh}^2\varphi\, d\theta^2\right).$$

Если t изменяется, получаем метрику трехмерного пространства Минковского в «сферических» координатах:

$$dx = \sin\varphi\cos\theta dr + r\left(\cos\varphi\cos\theta d\varphi - \sin\varphi\sin\theta d\theta\right),$$

$$dy = \sin\varphi\sin\theta dr + r\left(\cos\varphi\sin\theta d\varphi + \sin\varphi\cos\theta d\theta\right),$$

$$dw = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi,$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2\left(d\varphi^2 + \sin^2\varphi d\theta^2\right) =$$

$$= -c^2dt^2 + c^2t^2\left(d\varphi^2 + \mathrm{sh}^2\varphi d\theta^2\right).$$

В «сферических» координатах пространство Вселенной состоит из двух «полусфер», расширяющихся в противоположных напрявлениях времени. «Эллиптические» координаты описывают расширение одной из этих «полусфер». Ричард Фейман убедительно показал, что антиматерию можно рассматривать как материю, двигающуюся назад во времени [9]. Поэтому с физической точки зрения одну из «полусфер» можно рассматривать как сжимающийся антимир. Однако, с математической точки зрения следует рассматривать «полусферы» как две части Вселенной, расширяющиеся в противоположных направлениях времени.

В заключение рассмотрим приобразование координат пространства Минковского, ведущее к метрике в форме (1):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dy^2 - c^2d\tau^2,$$

$$x = \frac{4ctu_x}{4-u^2}, \quad y = \frac{4ctu_y}{4-u^2}, \quad z = \frac{4ctu_z}{4-u^2},$$

$$\tau = \frac{\left(4+u^2\right)t}{4-u^2}, \quad u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2,$$

$$dx = \frac{4cu_x dt}{4-u^2} + \frac{4ct\left(du_x\left(4-u^2\right) + 2u_x\left(u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z\right)\right)}{\left(4-u^2\right)^2},$$

$$dy = \ldots, \quad dz = \ldots,$$

$$d\tau = \frac{\left(4+u^2\right)dt}{4-u^2} + \frac{16t\left(u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z\right)}{\left(4-u^2\right)^2},$$

или

$$dx = d(t_x) + d(u_x), \quad dy = d(t_y) + d(u_y),$$

$$dz = d(t_z) + d(u_z), \quad d\tau = d(t) + d(u).$$

Тогда:

$$d(u_x)^2 + d(u_y)^2 + d(u_z)^2 - c^2 d(u)^2 =$$

$$= \frac{16c^2t^2\left(du_x^2 + du_y^2 + du_z^2\right)}{\left(4-u^2\right)^2},$$

$$d(t_x)^2 + d(t_y)^2 + d(t_z)^2 - c^2 d(t)^2 = -c^2 dt^2,$$

$$d(t_x)d(u_x) + d(t_y)d(u_y) + d(t_z)d(u_z) - c^2 d(t)d(u) = 0,$$

$$ds^2 = c^2t^2\left(\frac{du_x + du_y + du_z}{\left(1-u^2/4\right)^2}\right) - c^2dt^2.$$

Равенства

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2\tau^2 = -c^2t^2,$$

$$\frac{x}{u_x} = \frac{y}{u_y} = \frac{z}{u_z} = \frac{ct}{2}\left(\frac{\tau}{t} + 1\right) = \frac{c\tau + ct}{2}$$

означают, что u_x, u_y, u_z – это координаты точек стереографической проекции «сферы» радиуса i, с центром в начале координат, на гиперплоскость, временная координата которой равна i. Действительно, для аналогичной проекции «сферы» радиуса ict имеем:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{c\tau + ct}{2ct},$$

где x', y', z', ict – координаты точек проекции. Рассматриваемое преобразование координатам точек «сферы» радиуса ict ставит в соответствие координаты точек ее стереографической проекции, умноженные на $1/ct$.

1. С. Вейнберг. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975.
2. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уиллер. Гравитация. Т. 2. М.: Мир, 1977.
3. В. Н. Дубровский, Я. А. Смородинский, Е. Л. Сурков. Релятивистский мир. М.: Наука,1984.
4. А. А. Логунов. Анри Пуанкаре и теория относительности. М.: Наука, 2004.
5. Н. В. Ефимов. Высшая геометрия. М.: Наука, 1971.
6. Ф. Клейн. Об интегральной форме законов сохранения и теории пространственно замкнутого мира. – В кн.: Эйнштейновский сборник 1980-1981. М.: Наука, 1985.
7. Р. Н. Щербаков, Л. Ф. Пичурин. От проективной геометрии – к неевклидовой. М.: Просвещение, 1979.
8. В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1955.
9. Р. Фейнман. Почему должны существовать античастицы. – В кн.: Р.Фейнман, С. Вайнберг. Элементарные частицы и законы физики. М.: Мир, 2000.