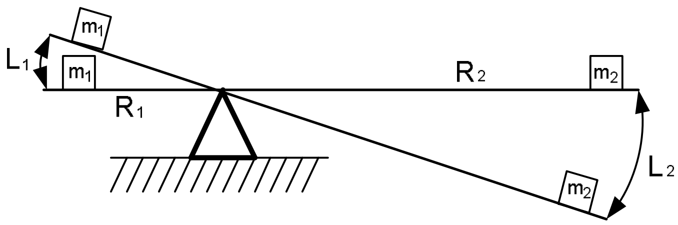
Из собственных опытов и от других людей мы имеем некоторые представления о том, как движутся физические тела при внешнем воздействии на них. При этом далеко не всегда мы способны ответить на вопрос: почему происходит такое движение. А ведь это главный вопрос в физических науках.

Вопрос №1.
Почему удлиненное тело при действии силы стремится повернуться вокруг центра масс, а не переместиться линейно, как единый кусок?
В отсутствие гравитационных полей главную роль при перемещении играет центр масс. Линейное перемещение тела возможно только в случае приложения силы к центру масс. Приложение силы в любой другой точке тела вызывает вращательное, а не линейное движение. Почему?

Рычаг Архимеда – следствие закона сохранения: масса на путь = const.



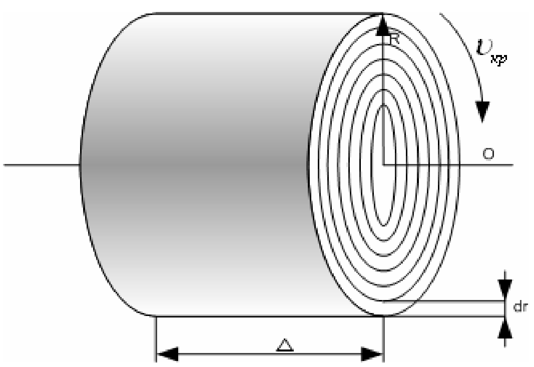
$P_1 = P_2$ $\quad m_1 \cdot \upsilon_1 = m_2 \cdot \upsilon_2$ $\quad m_1 \cdot \frac{L_1}{t_1} = m_2 \cdot \frac{L_2}{t_2}$ одновременность: $t_1 = t_2$

Тогда $m_1 \cdot L_1 = m_2 \cdot L_2$ или $\frac{m_1}{m_2} = \frac{L_2}{L_1}$

Из геометрии $\frac{L_2}{L_1} = \frac{R_2}{R_1}$ и тогда $\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_2}{R_1}$ это и есть правило рычагов Архимеда.

Чтобы поднять груз надо преодолеть гравитацию. Рычаг Архимеда позволяет «избавиться» от гравитации, но остается инерция.
Если рычаг невесом, то количество движения вращения кажется такое же, как если бы тело двигалось прямолинейно. При жестком невесомом рычаге круговое движение тела ни чем не отличается от линейного перемещения. На первый взгляд вроде все правильно.
Но давайте рассмотрим вращательное движение.
Одинаковое ли количество движения при вращении диска и при его линейном перемещении?
Иногда кажется, что у одного тела имеется два вида количества движения: круговое и линейное. Эта иллюзия породила ошибочную характеристику – момент количества движения.

Пусть диск толщиной Δ состоит из отдельных цилиндров разного диаметра с толщиной стенки dr.



Определим количество движения вещества цилиндра при его вращении во круг оси О.

$P_n = m_n \cdot \upsilon_n$ $\quad m_n = \rho \cdot V_n$

$V_n = dr \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_n \cdot \Delta$ $\quad \upsilon_n = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_n}{t}$ $\quad m_n = \rho \cdot dr \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_n \cdot \Delta$

И получим $P_n = \rho \cdot dr \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_n \cdot \Delta \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R_n}{t} = \rho \cdot dr \cdot \Delta \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R_n^2}{t}$

Это выражение количества движения для любого цилиндра из состава диска. Для определения количества движения всего диска при его вращении, суммируем количества движения всех цилиндров:

$$P = P_1 + P_2 + ... + P_n = \sum P_n = \int P_n(R_n) dr$$

$$P = \int_R^0 \rho \cdot \Delta \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R_n^2}{t} dr = \rho \cdot \Delta \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{t} \int_R^0 R_n^2 dr = \rho \cdot \Delta \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{3 \cdot t}$$

В итоге $P_{кр}$ = $\rho \cdot \Delta \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{3 \cdot t}$ где Δ – толщина диска

Выделим массу диска в виде $m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot \Delta = \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot \Delta$

$P_{кр}$ = $\pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot \Delta \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot R}{3 \cdot t} = m \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{t} = m \cdot \frac{2}{3} \cdot \upsilon_{кр}$

Таким образом, количество движения при вращении диска на самом деле равно

$P = m \cdot \frac{2}{3} \cdot \upsilon_{кр}$ а не $m \cdot \upsilon_{кр}$, как кажется на первый взгляд.

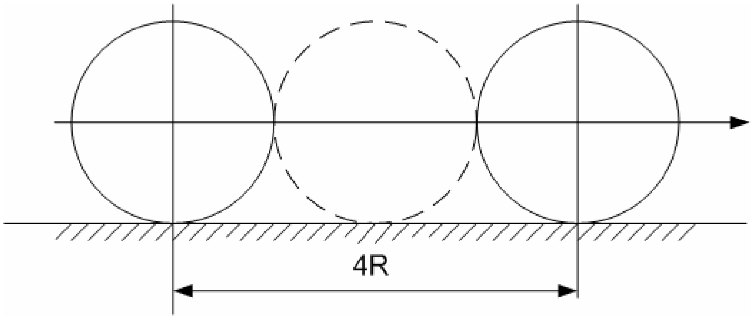
Пусть количество движения вращения равно количеству движения линейного перемещения $P_{кр}$ = $P_л$. Тогда

$m \cdot \frac{2}{3} \cdot \upsilon_{кр} = m \cdot \upsilon_л$ т.е. $\upsilon_л = \frac{2}{3} \upsilon_{кр}$

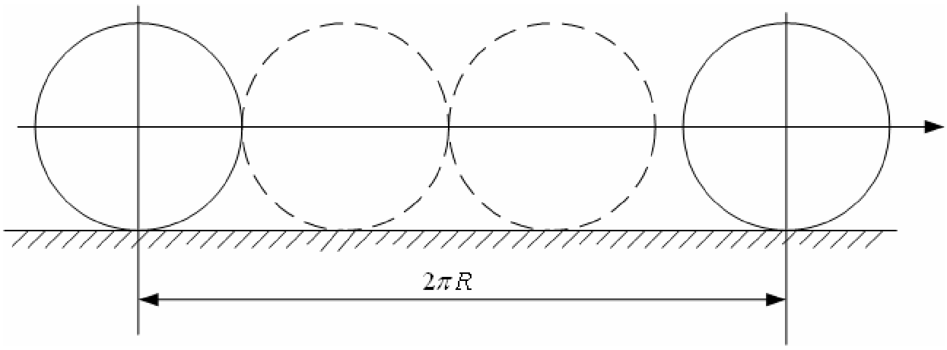
Здесь $\upsilon_{кр}$ есть круговая скорость на окружности диска. Все остальные точки внутри диска движутся медленнее.

И так мы показали, что количество движения вращения диска будет равно количеству его линейного движения в том случае, если скорость линейного движения составляет 2/3 скорости вращения. Иначе говоря, при прочих равных условиях ($\upsilon_л = \upsilon_{кр}$) количество движения вращения меньше количества движения линейного перемещения. Это и есть ответ на поставленный ранее вопрос: одинаковое ли количество движения при вращении диска и при его линейном перемещении. Но к движению рычага этот вывод применять мы не имеем право, т.к. пользовались круговой скоростью. А рычаг не совершает полный оборот.
Можно сказать, что количество движения вращения диска будет равно количеству его линейного движения, если за время полного оборота диска он переместится на расстояние 4R т.к.

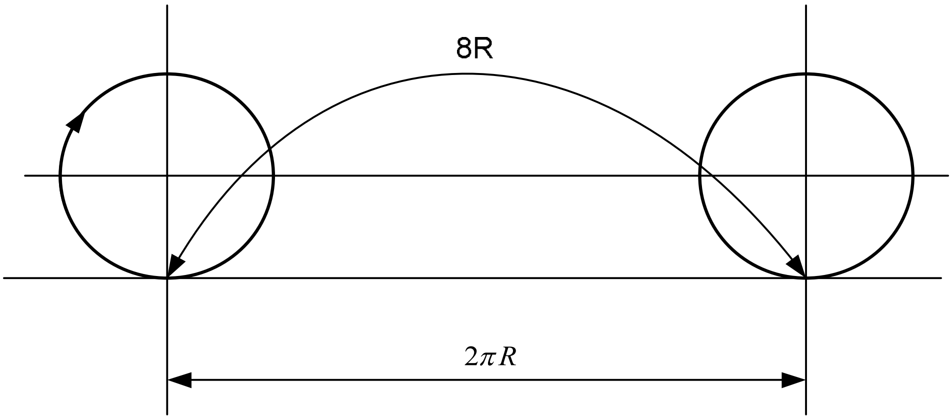
$$\upsilon_л = \frac{2}{3} \cdot \upsilon_{кр} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi \cdot 2 \cdot R}{T} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R}{3 \cdot T} \approx \frac{4 \cdot R}{T} .$$



Но если диск будет катиться, то за время полного оборота (T=t) переместиться линейно на $2\pi R$:



Если диск катится, то точка на его окружности проходит путь 8R. При этом весь диск линейно переместится на $2 \cdot \pi \cdot R$.



За период T скорость каждой точки $\upsilon_{кр.л} = \frac{8 \cdot R}{T}$.

Если диск не катится, а просто перемещается линейно на расстояние $2 \cdot \pi \cdot R$ за это же время, то его скорость $\upsilon_л = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$.

Тогда $\frac{P_{кр.л}}{P_л} = \frac{m \cdot \frac{8 \cdot R}{T}}{m \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}} = \frac{4}{\pi}$.

Т.е. количество движения катящегося диска больше количества движения линейного перемещения диска.

И так, мы получили весьма важный вывод:

1. количество движения при вращении диска меньше, чем количество движения его линейного перемещения $\frac{P_{кр}}{P_л} = \frac{2}{3}$.

Если внешнее воздействие на свободное тело не приходится на центр масс, то тело совершает поворот, а не линейное перемещение из-за того, что количество движения вращения меньше, чем количество движения его линейного перемещения. Проще говоря, тело охотнее совершает поворот, чем линейное перемещение.

2. Количество движения катящегося диска больше, чем количество движения его линейного перемещения $\frac{P_{кр.л}}{P_л} = \frac{4}{\pi}$.

Летящий вращающийся диск при внешнем воздействии скорее изменит свое линейное перемещение, чем вращательное движение (а значит и осевой наклон). По этой причине юла легко меняет свое линейное движение при неизменном направлении оси вращения.

Можно ли создать диск с таким распределением массы, чтобы его угловое количество движения было $m \cdot \upsilon_{кр}$, а не $m \cdot {}^2\!/_3 \upsilon$?

Вопрос №2.

В самом начале мы строили свои доказательства с использованием круговой скорости. Но для выводов закона рычага (Архимеда) нельзя пользоваться круговой скоростью, т.к. неизвестно состояние внутри периода T.
Если бы мы попытались описать движение точек диска за время t, меньшее, чем период T, с помощью круговой скорости $\omega = \upsilon_{кр} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$, то получили бы абсурдное решение: количество кругового движения в 4 раза больше количества движения линейного перемещения. Этот ошибочный вывод можно получить следующим образом.
Известно, что расстояние можно измерять любой линейкой (с любым масштабом). Сравнивая круговое и линейное движения, обозначим их скорости, как: $\upsilon_{л} = \frac{N_{л} \cdot R}{t}$ и $\upsilon_{кр} = \frac{N_{кр} \cdot R}{t}$, или $\upsilon_{л} = N_{л} \cdot \upsilon$ и $\upsilon_{кр} = N_{кр} \cdot \upsilon$, где $\upsilon = \frac{R}{t}$.
Переходя к количеству движения

$$P_{л} = m \cdot N_{л} \cdot \upsilon \quad \text{и} \quad P_{кр} = m \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot N_{кр} \cdot \upsilon$$

$$\frac{P_{кр}}{P_{л}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{N_{кр}}{N_{л}}.$$

При прочих равных условиях (т.е. при $N_{кр} = N_{л}$) имеем $\frac{P_{кр}}{P_{л}} = \frac{4}{3} \cdot \pi$.

Таким образом мы получили ошибочный результат, что, якобы, круговое количество движения примерно в 4 раза больше линейного.

По этому для описания движения рычага надо применять понятия линейной скорости.

Как известно, круговая скорость $\omega = \upsilon_{кр} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$. Если бы нам удалось разбить длину окружности L на малые отрезки dl, то мы бы смогли перейти к линейной скорости $\upsilon_{л} = \frac{l}{t}$. Но как разбить L?

$$L = 2 \cdot \pi \cdot R = K \cdot R$$

Коэффициент $K = 2 \cdot \pi$ есть константа, т.е. не делится. Тогда разобьем R: $R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$.Но при этом мы будем получать все меньшие и меньшие окружности, а не отрезки L:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot R_1 + 2 \cdot \pi \cdot R_2 + 2 \cdot \pi \cdot R_3 \text{ и т.д.}$$

Так что разбить длину окружности таким образом не удается.
Дело в том, что при анализе количества кругового движения мы пользовались формулами волны (ω), где движение внутри волны не известно (не выразимо).
Если мы выражаем движение точек диска через круговую скорость (через волновую математику), то имеем единицу шкалы движения - один оборот (и ни как не меньше). Таким образом (через радиус) не возможно описать движение точек диска внутри оборота.
Даже если мы выразим линейную скорость через дугу

$$\upsilon_{л} = \frac{dl}{dt}$$

и представим элемент пути dl как произведение радиуса r окружности, по которой движется материальная точка, на величину угла dα, соответствующего перемещению dl:

$$dl = R \cdot d\alpha \qquad \upsilon_{л} = R \cdot \frac{d\alpha}{dt} = R \cdot \omega_{\alpha}$$

то и здесь мы совершаем ошибку: когда мы говорим о малом элементе дуги, как о функции угла $dl = R \cdot d\alpha$, то должны помнить, что какой бы малости угол dα мы ни взяли, при увеличении радиуса можно получить большую величину dl, не пригодную для принципа интегрирования. Если этого не учесть, то мы опять придем к круговой скорости следующим образом:
объем тонкого обода диска

$$V = \Delta \cdot dr \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_n$$

Где Δ – ширина диска, а dr – малая толщина обода.
Количество движения этого обода

$$P_n = m \cdot \upsilon = V \cdot \rho \cdot \upsilon$$

Линейную скорость на окружности выразим через длину дуги, зависящую от малого угла, т.е. от радиуса

$$\upsilon = \frac{dl}{dt} = R \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

Тогда $P_n = \Delta \cdot dr \cdot \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_n \cdot R_n \cdot \frac{d\alpha}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot R_n^2 \cdot \Delta \cdot \rho \cdot dr \cdot \frac{d\alpha}{dt}$

Суммируем все тонкие обода диска

$$P = \sum_R^0 P_n = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \Delta \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot \int R_n^2 dr = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho \cdot \Delta \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

В итоге опять получаем

$$P_{кр} = \frac{2}{3} \cdot m \cdot \upsilon$$

Так что оставим dl в виде какой угодно малой части окружности и не будем вводить его в зависимость от радиуса $\upsilon_л = \frac{dl}{dt}$. Тогда

$$P_n = 2 \cdot \pi \cdot \Delta \cdot \rho \cdot dr \cdot R_n \cdot \frac{dl}{dt}$$

$$P = \sum_R^0 P_n = 2 \cdot \pi \cdot \Delta \cdot \rho \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \int_R^0 R_n dr = \pi \cdot R^2 \cdot \Delta \cdot \rho \cdot \frac{dl}{dt}$$

В итоге $P_{кр} = m \cdot \upsilon_{л.кр}$ или $P_{кр} = P_л$

Таким образом, если не вводить зависимость скорости точки от радиуса, то вместо вращательного движения мы получаем прямолинейное.

Как видим, на сегодняшнем уровне развития науки у нас нет способа корректно выразить круговое движение.