Я исходил из метода В.С. Сорокина («Успехи физических наук» т.LIX, вып.2 1956г. стр.325-362) в изложении М.А. Айзермана («Классическая механика» Москва, Наука, 1974г. стр.44 и далее).

Законы сохранения.

Пояснение.

Рассматривается вывод законов сохранения из общих соображений (принципа относительности Галилея).
- Выводятся формулы энергии и импульса в классическом виде (уравнения (11-12), в них масса представлена как коэффициенты.
- В дальнейшем рассмотрении получены новые законы сохранения, из которых вытекают формула канонического распределения Гиббса (статистическая физика) (уравнение 16) и волновые свойства тел.
- Также получен потенциал Хиггса и уравнение, отличающееся от СТО Эйнштейна только экспонентой.

1. Мера движения. (в изложении М.А. Айзермана «Классическая механика» Москва, Наука, 1974г. стр.44 и далее, метод В.С. Сорокина «Успехи физических наук» т.LIX, вып.2 1956г. Стр.325-362).

Наблюдая движения тел, люди издавна обращали внимание на то, что чем больше масса и скорость движущегося тела, тем более сильный эффект возникает при соударениях с другими телами. Так, например, при движении ядра его разрушающая сила тем больше, чем больше его масса и скорость; при ударе движущегося шара о неподвижный, последний приобретает тем большую скорость, чем большую скорость имел первый шар; метеорит, достигающий Земли, проникает в грунт тем глубже, чем больше масса и скорость метеорита. Эти и многие иные примеры такого рода наводят на мысль о существовании меры механического движения (короче говоря, *меры движения*) и о зависимости этой меры от скорости и массы движущегося материального объекта.

Наблюдая движение шаров до столкновения и после него, можно заметить, что если в результате столкновения движение одного из шаров «уменьшилось», то движение второго шара «увеличилось» и притом тем более, чем существеннее «уменьшилось» движение первого шара. Представляется поэтому, что хотя мера движения каждого из шаров меняется во время соударения, сумма таких мер для обоих шаров остается неизменной, т.е. что при некоторых условиях происходит «обмен движением» при сохранении меры движения в целом.

История механики связана с длительными спорами ученых о том, какая величина является мерой движения, в частности , является ли мера движения скалярной величиной или вектором. Спор этот имеет лишь исторический интерес, но именно в ходе этой дискуссии были введены две основные характеристики движения - кинетическая энергия и количество движения (импульс), которые играют центральную роль во всем построении механики. Попробуем поэтому точнее определить интуитивно введенное выше понятие о мере движения и из общих соображений выяснить некоторые свойства, которыми она должна обладать.

Будем исходить из предположения, что мерой движения материальной точки служит скалярная функция массы и скорости точки $f\left(m_i,\vec{v}_i\right)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1° Мера движения аддитивна. Это требование означает, что мера движения системы f_c получается как сумма мер движения всех N точек, входящих в систему

$$f_c=\sum_{i=1}^{N} f_c\left(m_i,\vec{v}_i\right).$$

2° Мера движения инвариантна по отношению к повороту системы отсчета. Из этого интуитивно очевидного требования (естественно вытекающего из основных предположений о пространстве и времени) сразу следует, что мера движения не должна зависеть от положения точки, от направления ее скорости и от времени и может зависеть лишь от модуля скорости $\left|\vec{v}_i\right|=v_i$: $f=f\left(m_i,v_i\right)$.

3° Мера движения замкнутой системы материальных точек не должна изменяться при временных взаимодействиях. Временными называются взаимодействия, продолжающиеся лишь конечное время τ и не обязательно обусловленные непосредственным контактом тел. Предполагается, что за время τ меняются лишь механические характеристики материальных точек - их положения и скорости, но остаются неизменными прочие параметры, характеризующие их физические состояния - температура, электрический заряд и т.д. Понятие «временное взаимодействие» - естественное обобщение понятия «соударение». Это требование означает тогда, что мера движения всей замкнутой системы материальных точек f_c, подсчитанная до начала взаимодействия и после его окончания, должна быть одной и той же.

Разумеется, условие сохранения меры 3° должно быть инвариантно по отношению к преобразованиям Галилея. Это требование - прямое следствие принципа относительности Галилея.

Определим теперь, какой вид имеет скалярная функция, удовлетворяющая всем этим условиям.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух материальных точек с массами m_1 и m_2. Пусть скорости этих точек относительно инерциальной системы отсчета равны v_1, v_2 в момент t (до взаимодействия) и v'_1, v'_2 - в момент $t' = t + \tau$ (после взаимодействия). Если функция $f(m_i, v_i)$ служит мерой движения, то в силу условия 3° должно выполняться равенство

$$f(m_1, v_1) + f(m_2, v_2) = f(m_1, v'_1) + f(m_2, v'_2) \qquad (1)$$

Выберем систему отсчета, движущуюся относительно исходной поступательно и равномерно со скоростью ***-u***. Эта система также инерциальна. Рассматриваемые точки имеют в ней скорости $v_1 + u, v_2 + u$ в момент *t* и $v'_1 + u, v'_2 + u$ в момент *t′*. В силу принципа относительности Галилея функция f должна быть мерой движения и в этой системе, т.е. должно выполняться равенство

$$f(m_1, v_1 + u) + f(m_2, v_2 + u) = f(m_1, v'_1 + u) + f(m_2, v'_2 + u) \qquad (2)$$

Выберем в «старой» инерциальной системе отсчета декартову систему координат **x, y, z** так, чтобы координаты вектора ***u*** были равны (u, 0, 0), т.е. предположим, что «новая» инерциальная система движется относительно «старой» со скоростью ***-u*** вдоль оси **x**. Тогда

$$f(m, v + u) = f(m, v_x + u, v_y, v_z),$$

где ***v_x, v_y, v_z*** - координаты вектора ***v***, и равенство (2) принимает вид

$$f(m_1, v_{1x} + u, v_{1y}, v_{1z}) + f(m_2, v_{2x} + u, v_{2y}, v_{2z}) = f(m_1, v'_{1x} + u, v'_{1y}, v'_{1z}) + f(m_2, v'_{2x} + u, v'_{2y}, v'_{2z}), \qquad (3)$$

Разложим теперь функции, входящие в это равенство, в ряды Тейлора по степеням ***u***. Выписав лишь линейные члены и заменив многоточиями члены высших порядков, получим

$$f(m_1, v_1) + u \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_1 + \ldots + f(m_2, v_2) + u \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_2 + \ldots = f(m_1, v'_1) + u \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)'_1 + \ldots + f(m_2, v'_2) + u \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)'_2 + \ldots$$

(4)

где $\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_k$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)'_k$ (k=1, 2) условно означают производную $\frac{\partial f(m, v_x, v_y, v_z)}{\partial v_x}$ после подстановки в нее вместо ***v_x, v_y, v_z*** координат векторов v_1, v_2 и v'_1, v'_2 соответственно. Отбросив равные (в силу (1)) свободные члены в правой и левой частях равенства (4), разделив результат на ***u***, устремив u к нулю и отбросив члены, замененные многоточием, в пределе получим

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_1' + \left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_2' \qquad (5)$$

Равенство (5) имеет совершенно такую же структуру, что и равенство (1), только вместо искомой меры движения *f* в равенстве (5) стоит частная производная $\frac{\partial f}{\partial v_x}$. Но это означает, что если функция *f* удовлетворяет равенству (1), то и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial v_x}$ также удовлетворяет равенству (1).

Мы пришли к этому выводу, предположив, что новая инерциальная система отсчета движется вдоль оси x, т.е. что вектор ***u*** имеет координаты (u, 0, 0). Предположим теперь, что она движется относительно старой системы отсчета вдоль оси y или вдоль оси z, т.е. что вектор ***u*** имеет координаты (0, u, 0) или (0, 0, u). Дословно повторив проведенные выше рассуждения, установим, что равенству типа (1) удовлетворяют также частные производные $\frac{\partial f}{\partial v_y}$ и $\frac{\partial f}{\partial v_z}$.

Введем теперь вектор ***q*** с координатами $\frac{\partial f}{\partial v_x}$, $\frac{\partial f}{\partial v_y}$ и $\frac{\partial f}{\partial v_z}$. Каждая из этих частных производных представляет собой функцию переменных v_x, v_y, v_z и m. Поэтому вектор ***q*** является функцией переменных v_x, v_y, v_z и m, т.е. ***q*** есть вектор-функция от m и от векторного аргумента ***v***, удовлетворяющая равенству (1). Функция $q(m, v)$ аддитивна и, являясь вектором, инвариантна по отношению к повороту системы отсчета. Таким образом, опираясь только на принцип относительности Галилея, мы установили важный факт: если существует скалярная функция $f(m, v)$, удовлетворяющая условиям 1°, 2° и 3°, то существует и векторная функция ***q***, удовлетворяющая этим трем условиям, причем ***f*** и ***q*** связаны соотношениями

$$q_x = \frac{\partial f}{\partial v_x}, q_y = \frac{\partial f}{\partial v_y}, q_z = \frac{\partial f}{\partial v_z} \qquad (6)$$

Теперь, исходя из принципа относительности Галилея, потребуем, чтобы равенство (5) (и аналогичные равенства для $\frac{\partial f}{\partial v_y}$ и $\frac{\partial f}{\partial v_z}$) сохранялось при преобразованиях Галилея. Легко видеть, что повторяя подобные рассуждения, но только исходя не из равенства (1), а из равенства (5) (и аналогичных равенств для $\frac{\partial f}{\partial v_y}$ и $\frac{\partial f}{\partial v_z}$), мы установим, что равенству типа (1) должны удовлетворять все вторые производные, т.е. шесть функций

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_y} = \frac{\partial^2 f}{\partial v_y \partial v_x}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_z} = \frac{\partial^2 f}{\partial v_z \partial v_x}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_y \partial v_z} = \frac{\partial^2 f}{\partial v_z \partial v_y}$$

Выше было установлено, что равенства типа (1) могут быть выписаны для десяти функций, а именно для

$$f, \frac{\partial f}{\partial v_x}, \frac{\partial f}{\partial v_y}, \frac{\partial f}{\partial v_z}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_y}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_z}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_y \partial v_z} \quad (7)$$

По постановке задачи предполагается, что заданы массы m_1 и m_2 двух взаимодействующих точек и их скорости до взаимодействия v_1 и v_2 и что задание этих величин полностью определяет шесть неизвестных величин - проекции скоростей этих же точек после взаимодействия $v'_{1x}, v'_{1y}, v'_{1z}, v'_{2x}, v'_{2y}, v'_{2z}$. Таким образом, десять равенств типа (1), о которых выше шла речь, составляют **систему из десяти уравнений, содержащую лишь шесть неизвестных.** Эта система уравнений должна иметь решение (и притом единственное). Ясно поэтому, что из десяти уравнений лишь шесть независимы, т.е. из функций (7) лишь шесть функционально независимы.

Функция ***f*** входит в число шести независимых, и каковы бы ни были остальные пять функций, входящих в эту шестерку, хотя бы одна вторая производная в нее не войдет - ведь среди десяти функций (7) содержится шесть вторых производных. Наши дальнейшие рассуждения не зависят от того, какая конкретно вторая производная является зависимой функцией - пусть, например, это $\frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_y}$, - и от того, какие конкретно пять производных входят в число шести независимых - пусть, например, это $f, \frac{\partial f}{\partial v_x}, \frac{\partial f}{\partial v_y}, \frac{\partial f}{\partial v_z}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_z}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_y \partial v_z}$. Это означает, что существует функция

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_y} = F\left(f, \frac{\partial f}{\partial v_x}, \frac{\partial f}{\partial v_y}, \frac{\partial f}{\partial v_z}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_z}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_y \partial v_z}\right).$$

В силу аддитивности всех рассматриваемых функций F может быть лишь линейной функцией с коэффициентами, не зависящими от искомых скоростей [1)], т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_y}=\alpha_1 f+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial v_x}+\alpha_3\frac{\partial f}{\partial v_y}+\alpha_4\frac{\partial f}{\partial v_z}+\alpha_5\frac{\partial^2 f}{\partial v_x\partial v_z}+\alpha_6\frac{\partial^2 f}{\partial v_y\partial v_z} \quad (8)$$

Вспоминая теперь, что в силу соображений, связанных с изотропностью пространства, функция f может зависеть лишь от модуля ***v***, т.е. имеет вид $f(m,|\vec{v}|)$, подсчитаем производные, где i, k=x,y,z,

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f(m,|\vec{v}|)}{\partial v_i}=\frac{\partial f(m,|\vec{v}|)}{\partial|\vec{v}|}\cdot\frac{\partial|\vec{v}|}{\partial v_i}=\frac{\partial f}{\partial|\vec{v}|}\cdot\frac{v_i}{|\vec{v}|}\\
&\frac{\partial^2 f(m,|\vec{v}|)}{\partial v_i\partial v_k}=\frac{v_i v_k}{|\vec{v}|^2}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial|\vec{v}|^2}-\frac{\partial f}{\partial|\vec{v}|}\cdot\frac{1}{|\vec{v}|}\right);(i\neq k)\\
&\frac{\partial^2 f(m,|\vec{v}|)}{\partial v_i^2}=\frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\frac{\partial f}{\partial|\vec{v}|}+\frac{v_i^2}{|\vec{v}|^2}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{|\vec{v}|^2}-\frac{\partial f}{\partial|\vec{v}|}\cdot\frac{1}{|\vec{v}|}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Здесь учтено, что $\frac{\partial|\vec{v}|}{\partial v_i}=\frac{\partial\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}{\partial v_i}=\frac{v_i}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}=\frac{v_i}{|\vec{v}|}$. Из равенства (9) следует, что левая часть равенства (8) содержит множитель $v_x v_y$; в то же время ни один член в правой части равенства (8) такого множителя не содержит. Поэтому, приравнивая коэффициенты при членах,

---

1) Действительно, из предыдущих рассуждений следует, что

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v_x\partial v_y}\right)_c=F\left[f,\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_c,\left(\frac{\partial f}{\partial v_y}\right)_c,\left(\frac{\partial f}{\partial v_z}\right)_c,\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v_x\partial v_z}\right)_c,\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v_y\partial v_z}\right)_c\right];$$

индекс с указывает, что функции подсчитаны для системы в целом, например: $f_c=f(m_1,v_1)+f(m_2,v_2)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_c=\frac{\partial f(m_1,v_1)}{\partial v_{1\mathrm{x}}}+\frac{\partial f(m_2,v_2)}{\partial v_{2\mathrm{x}}}$.

Так как $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v_x\partial v_y}\right)_c$ тоже представляется аналогичной суммой, таким свойством должна обладать и функция F, а это возможно лишь при условии, что F линейна по всем аргументам и коэффициенты α не зависят от скоростей.

содержащих $v_x v_y$ слева и справа в равенстве (8), получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial |\vec{v}|^2} - \frac{\partial f}{\partial |\vec{v}|} \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} = 0 .$$ (10) (здесь появляется масса)

Решением которого есть: $f = a(m)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + b(m)$. (11)

Таким образом, из требований 1°-3° вытекает, что если существует скалярная мера движения , $f(m, |\vec{v}|)$ то она имеет вид (11) и что тогда существует векторная мера движения ***q***: $q_i = 2\mathrm{a}(m) v_i$, где i = x, y, z или в векторной записи $\vec{q} = 2\mathrm{a}(m)\vec{v}$. (12)

В классической механике нормируют ***f*** так, чтобы *b(m)=0* и *a(m)=m/2*.

2. (Моё продолжение)

Количество возможных функций **десять**:

$$f, \frac{\partial f}{\partial v_x}, \frac{\partial f}{\partial v_y}, \frac{\partial f}{\partial v_z}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_y}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_z}, \frac{\partial^2 f}{\partial v_y \partial v_z} \quad (7).$$

Количество переменных $v'_{1x}, v'_{1y}, v'_{1z}, v'_{2x}, v'_{2y}, v'_{2z}$ **шесть**,

и уравнений типа (8)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_y} = \alpha_1 f + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial v_x} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial v_y} + \alpha_4 \frac{\partial f}{\partial v_z} + \alpha_5 \frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_z} + \alpha_6 \frac{\partial^2 f}{\partial v_y \partial v_z}$$ **три**.

Итак, 10-6-3=1.

Поэтому постараемся найти еще одно уравнение.

Такое уравнение есть:

$$\sum_{i=x,y,z} \frac{\partial^2 f}{\partial v_i^2} + \alpha f = 0 . \quad (13)$$

Или подставив значения производных (9):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial |\vec{v}|^2} + \frac{\partial f}{\partial |\vec{v}|} \cdot \frac{2}{|\vec{v}|} + \alpha f = 0 . \quad (14)$$

Его решение:

$$f = \frac{C_1 \cdot \exp(-\sqrt{-\alpha}|\vec{v}|)}{|\vec{v}|} + \frac{C_2 \cdot \exp(\sqrt{-\alpha}|\vec{v}|)}{|\vec{v}|} , \quad (15),$$

где C_1 и C_2 константы.

Это **новый закон сохранения**. Исследуем его.

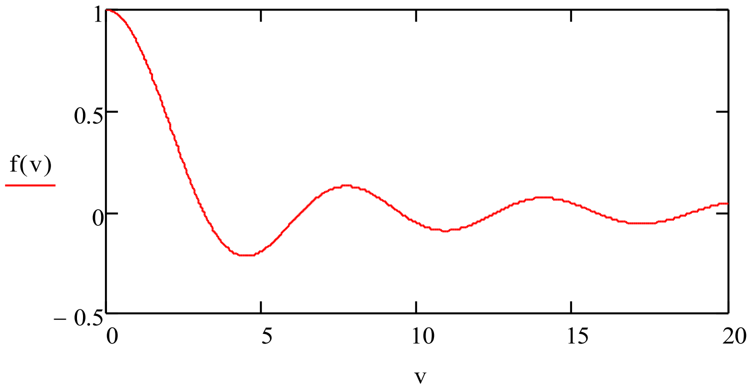
2.1. Графики уравнения (15):

при:

$\alpha := 1$

$f(0) = 1$

$f'(0) = 0$



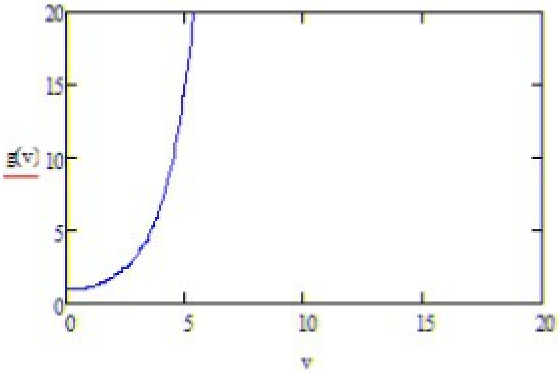
при:

$\alpha := -1$

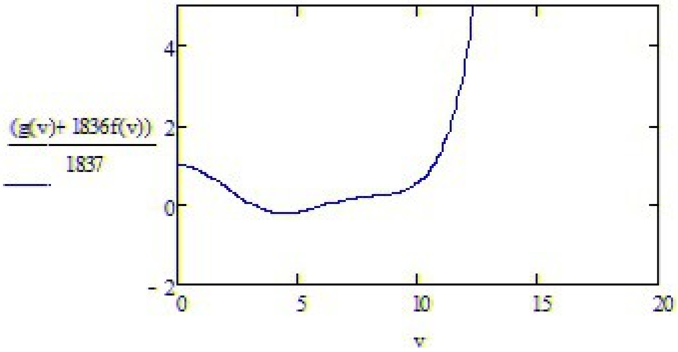
$f(0) = 1$

$f'(0) = 0$

g(v):=f(v)



Сложим эти два графика с коэффициентами, пропорциональными массам электрона и протона:



(это напоминает потенциал Хиггса)

2.2. Каноническое распределение Гиббса

Поищем **другие законы**, используя сохраняющиеся функции.

Если из уравнения (14) вычесть (10), то получим: $\frac{\partial f}{\partial|\vec{v}|}\cdot\frac{3}{|\vec{v}|}+\alpha f=0$,

проинтегрировав его, получим:

$$f=C\cdot\exp\left(-\frac{\alpha}{6}\cdot|\vec{v}|^2\right) \qquad (16)$$

, где C - константа. Уравнение (16) очень напоминает **статистическое распределение (каноническое распределение Гиббса)**.

Также формула (16) является решением уравнения (14) при $|\alpha|\ll 1$.

2.3. **Волновые уравнения.**

Если к уравнению (14) добавить удвоенное (10), то получим:

$$3\frac{\partial^2 f}{\partial|\vec{v}|^2}+\alpha f=0,$$

Это уравнение простого осциллятора. Проинтегрировав его, получим:

$$f=C_1\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{3}}|\vec{v}|\right)+C_2\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{3}}|\vec{v}|\right),$$

таким образом мы получили волновые уравнения, похожие на те, что используются в **квантовой механике**.

2.4 Сомножитель $\frac{1}{|\vec{v}|}$ в члене $\frac{\partial f}{\partial|\vec{v}|}\cdot\frac{2}{|\vec{v}|}$ - <u>условно постоянный,</u> $\approx\frac{1}{|\vec{v}_0|}$, где $\vec{v}_0=const$.

Этот случай может быть обоснован тем, что частица состоит из субчастиц. Разобьём движение во времени этих субчастиц на интервалы, и предположив, что в конце каждого интервала взаимодействие отключается, а в начале следующего включается, получим случай, когда f соответствует условиям данной статьи. Упростим модель до 2-х частиц, движущихся со скоростями $\vec{v}_0+\vec{u}$ и $\vec{v}_0-\vec{u}$, где $\vec{v}_0$ - скорость центра масс, а $\vec{u}$ - относительная скорость. Получим при $|\vec{u}|\ll|\vec{v}_0|$; и $\vec{v}_0$, $\vec{u}$ - коллинеарных; разложение f и её производных в ряд Тейлора до 2-го порядка $\vec{u}$:
(для краткости не будем писать знак вектора и функцию абсолютного значения, а $v\approx v_0$, где v - переменная)

$$f(v \pm u) = f(v) \pm \frac{\partial f(v)}{\partial v} \cdot u + \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \cdot u^2 \;;$$

$$\frac{\partial f(v \pm u)}{\partial (v \pm u)} = \frac{\partial f(v)}{\partial v} \pm \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \cdot u \;;$$

$$\frac{\partial^2 f(v \pm u)}{\partial (v \pm u)^2} = \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \,.$$

Подставив эти ряды Тейлора в уравнение (14) и просуммировав, получим:

$$\frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \cdot (1 - \frac{2 \cdot u^2}{v_0^2 - u^2} + \frac{\alpha}{2} \cdot u^2) + \frac{2 \cdot v_0}{v_0^2 - u^2} \cdot \frac{\partial f(v)}{\partial v} + \alpha \cdot f(v) = 0 \,.$$

Отбросив члены, сопоставимые и меньше u^2, получим:

$$\frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} + \frac{2}{v_0} \cdot \frac{\partial f(v)}{\partial v} + \alpha \cdot f(v) = 0 \,.$$

Решением которого является:

$$f = const \cdot \exp(\pm \frac{\sqrt{1 - \alpha \cdot v_0^2}}{v_0} \cdot v) \,.$$

Учтя $v \approx v_0$, и подставив $\alpha = \frac{1}{c^2}$, получим $f = const \cdot \exp(\pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})$, что очень близко к формулам Эйнштейна специальной теории относительности.