Гиперболическая механика

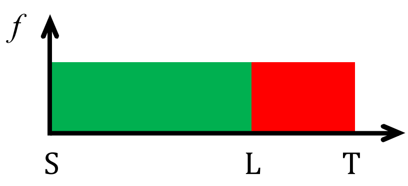
В статье приводятся десятки простых и предельно точных формул, применимых, например, в космической навигации.

Примем световую секунду за единицу длины (её размерность – секунда). Продольный эффект Доплера в классической механике примет простой вид: $f' = f(1 - \mathrm{v})$. При удалении $\mathrm{v} > 0$, при сближении $\mathrm{v} < 0$. Чем ближе классическая скорость v к нулю, тем ближе выражение $f(1 - \mathrm{v})$ к наблюдаемой частоте f'. Следовательно, для любого значения v можем записать: $f' = f\left(1 - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}$. Отсюда, $f' = fe^{-\mathrm{v}}$, где $-\infty < \mathrm{v} < +\infty$.

Пусть условно неподвижный инерциальный источник излучает световые импульсы с частотой следования f. Пусть наблюдатель сначала удаляется от источника со скоростью v, а затем возвращается к источнику со скоростью минус v.

Если 2τ – общее время движения наблюдателя по его часам, а $2\mathrm{T}$ – по неподвижным часам, тогда $2\mathrm{T}f = \tau f e^{-\mathrm{v}} + \tau f e^{\mathrm{v}}$, где $2\mathrm{T}f$ – излучённые импульсы, а $\tau f e^{-\mathrm{v}} + \tau f e^{\mathrm{v}}$ – принятые импульсы. Время $\mathrm{T} = \tau \operatorname{ch} \mathrm{v}$, где $\operatorname{ch} \mathrm{v}$ – гиперболический косинус от классической скорости v.

Разность времени $\mathrm{T} - \tau$ не зависит от кривизны траектории наблюдателя-путешественника.



Красный цвет на рисунках – импульсы, принятые наблюдателем за время его удаления от источника. Фиолетовый цвет – импульсы, принятые при возвращении к источнику. Точки T и $2\mathrm{T}$ – положения первого импульса в моменты времени T и $2\mathrm{T}$. Расстояние $\mathrm{L} = \mathrm{T} - \tau e^{-\mathrm{v}}$. Таким образом, путь в условно неподвижной (базовой) системе координат $\mathrm{L} = \tau \operatorname{sh} \mathrm{v} = \mathrm{T} \operatorname{th} \mathrm{v}$, где $\operatorname{sh} \mathrm{v}$ – гиперболический синус от v, а $\operatorname{th} \mathrm{v}$ – гиперболический тангенс от v.

Очевидно, что $v = \operatorname{Arsh}\frac{dL}{d\tau} = \operatorname{Arth}\frac{dL}{dT}$. Вектор $\vec{v} = \operatorname{Arsh}\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \operatorname{Arth}\frac{d\vec{r}}{dT}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор в базовой системе координат.

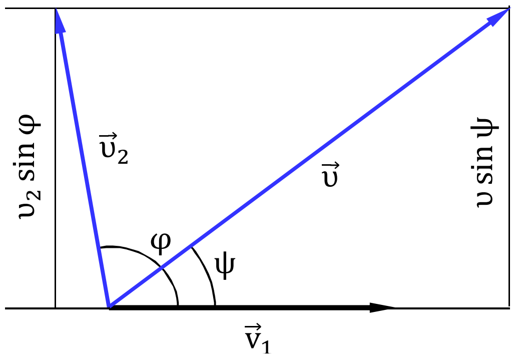
Обозначим гиперболические функции от классической скорости v греческими буквами: $\operatorname{ch} v = \gamma$, $\operatorname{sh} v = \upsilon$, $\operatorname{th} v = \beta$. Причём $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}$, $\vec{\beta} = \frac{d\vec{r}}{dT}$, где β – реальная скорость чего-либо относительно наблюдателя; υ – реальная скорость самого наблюдателя относительно базы.

Импульс $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. Кинетическая энергия $K = m(\gamma - 1)$. Полная энергия $E = K + m = m\gamma$. Из $\operatorname{ch}^2 v - \operatorname{sh}^2 v = 1$ следует $E^2 - p^2 = m^2$.

Сила $\vec{F} = m\vec{a} = d\vec{p}/dT$, где ускорение a измеряется в системе отсчёта, связанной с массой m, а dp/dT – в базовой системе отсчёта.

Сложение скоростей

(преобразование вектора скорости)



Пусть v_1 – переносная скорость, а v_2 – относительная скорость. Абсолютную скорость v выведем из преобразований Лоренца [1].

$$\left.\begin{aligned} E &= \gamma_1 E_2 + \gamma_1 \beta_1 p_2 \cos\varphi, \\ p\cos\psi &= \gamma_1 p_2 \cos\varphi + \gamma_1\beta_1 E_2, \\ p\sin\psi &= p_2 \sin\varphi. \end{aligned}\right\}$$

[1] – Всего лишь кинематика, Копылов Г. И., 1981 год, стр. 37.

Выделяем импульс $p = \sqrt{(\gamma_1 p_2 \cos\varphi + \gamma_1\beta_1 E_2)^2 + p_2^2 \sin^2\varphi}$.

Отделяем массу $m\upsilon = \sqrt{(\gamma_1 m\upsilon_2 \cos\varphi + \gamma_1\beta_1 m\gamma_2)^2 + m^2\upsilon_2^2 \sin^2\varphi}$.

Удаляем массу $\upsilon = \sqrt{(\gamma_1\upsilon_2 \cos\varphi + \gamma_1\beta_1\gamma_2)^2 + \upsilon_2^2 \sin^2\varphi}$.

В итоге $\upsilon = \upsilon_2\sqrt{\left(\gamma_1\cos\varphi + \frac{\upsilon_1}{\beta_2}\right)^2 + \sin^2\varphi}$, $\quad \cos\psi = \frac{\upsilon_2}{\upsilon}\left(\gamma_1\cos\varphi + \frac{\upsilon_1}{\beta_2}\right)$.

Наоборот $\upsilon_2 = \upsilon\sqrt{\left(\gamma_1\cos\psi - \frac{\upsilon_1}{\beta}\right)^2 + \sin^2\psi}$, $\quad \cos\varphi = \frac{\upsilon}{\upsilon_2}\left(\gamma_1\cos\psi - \frac{\upsilon_1}{\beta}\right)$.

Сложение коллинеарных (параллельных) скоростей $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Время и путь в общем виде $\mathrm{T} = \int_0^\tau \gamma(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, $\mathrm{L} = \int_0^\tau \upsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T})\,\mathrm{dT}$. Время и путь при постоянном ускорении, измеряемом ускоряющимся наблюдателем $\mathrm{T} = \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau$, $\mathrm{L} = \frac{1}{a}(\operatorname{ch} a\tau - 1) = \frac{1}{a}\left(\sqrt{1 + a^2\mathrm{T}^2} - 1\right)$.

Тангенциальное и нормальное ускорения, измеряемые ускоряющимся наблюдателем $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}/\mathrm{d}\tau$, $a_n = \omega^2\mathrm{R} = \upsilon^2/\mathrm{R}$, где ω – угловая скорость, измеряемая по часам, движущимся по окружности; R – радиус окружности, измеряемый в базовой системе координат.

Скорость ракеты $\mathrm{v} = \beta_0 \ln\frac{\mathrm{m}_0}{\mathrm{m}}$, где m_0 – начальная масса ракеты; β_0 – реальная скорость рабочего тела в системе отсчёта ракеты.

Скорость спутника на круговой орбите, измеряемая по часам неподвижным относительно центра орбиты, когда $\frac{\mathrm{m_C}}{\mathrm{m}} \to 0$, $\beta = \sqrt{\frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{R}}}$.

Ускорение свободного падения $g = \frac{1}{\mathrm{R}}\operatorname{sh}^2\left(\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{R}}}\right) = \frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{R}^2\left(1-\frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{R}}\right)}$.

Круговая скорость, измеряемая по часам спутника, $\upsilon = \sqrt{g\mathrm{R}}$.

Вторая космическая скорость $\mathrm{v} = \operatorname{Arch}\left(1 - \ln\left|1 - \frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{R}}\right|\right)$.

Работа $\mathrm{W} = \mathrm{m_c}\ln\left|1 - \frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{R}_2}\right| - \mathrm{m_c}\ln\left|1 - \frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{R}_1}\right|$, где $\mathrm{R}_2 > \mathrm{R}_1$.

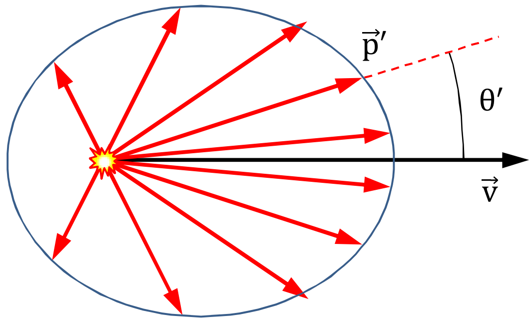
Гравитационное красное смещение $\mathrm{z_G} = \frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{R}_1 - \mathrm{Gm}} - \frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{R}_2 - \mathrm{Gm}}$, где источник на расстоянии R_1 от центра, а приёмник на расстоянии R_2. Частота источника для бесконечно удалённого наблюдателя $f' = f\left(1 - \frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{R}}\right)$.

Угол гравитационного отклонения луча света в радианах $\theta = \frac{4\mathrm{Gm}}{\mathrm{R} - \mathrm{Gm}}$.

При $\mathrm{R} < \mathrm{Gm}$ возникает антигравитация. Она препятствует сжатию массы в точку. В результате, образуется шар с плотностью $\rho = \frac{1}{4\pi \mathrm{r}^2 \mathrm{G}}$, где r – расстояние от центра. Если шар быстро вращается или имеет аккреционный диск, то антигравитация преобладает на его полюсах.

Эффект Доплера $f' = f\frac{1}{\gamma - \upsilon\cos\theta'}$, где v – относительная классическая скорость; θ' – наблюдаемый угол между $\vec{\mathrm{v}}$ и линией наблюдения.

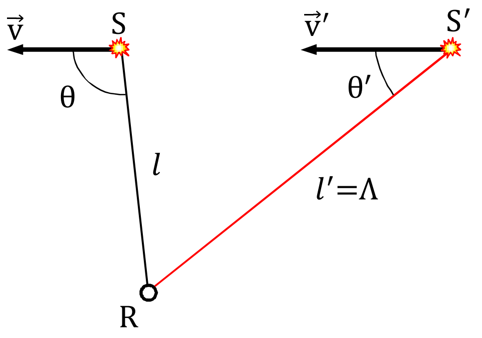
Импульс фотона $\mathrm{p}' = \mathrm{p}\frac{1}{\gamma - \upsilon\cos\theta'}$ от угла θ' даёт эллипс, в фокусе которого источник. Эксцентриситет эллипса $\mathrm{e} = \mathrm{th}\,\mathrm{v}$.



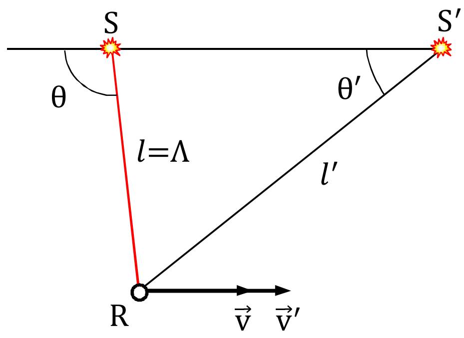
Аберрация света $\mathrm{tg}\frac{\theta'}{2} = e^{-\mathrm{v}}\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$.

Наблюдаемое расстояние до источника $l' = \frac{\Lambda}{\gamma - \upsilon\cos\theta'}$, где Λ – путь фотона от точки излучения до приёмника в базовой системе координат; v – классическая скорость приёмника относительно базовой системы координат в момент поглощения фотона.

Наблюдаемая скорость источника относительно приёмника, или наоборот $\vec{\mathrm{v}}' = \vec{\upsilon}\frac{1}{\gamma - \upsilon\cos\theta'} = \vec{\beta}\frac{1}{1 - \beta\cos\theta'}$.



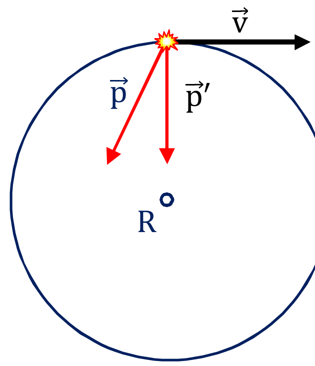
Движется источник
относительно приёмника



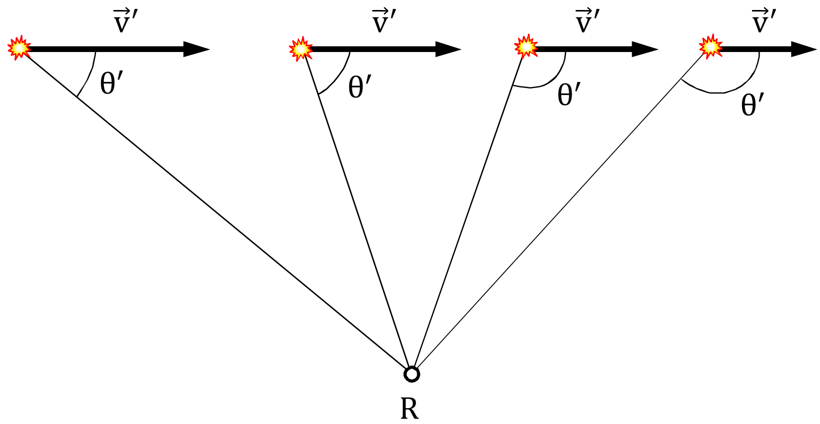
Движется приёмник
относительно источника

Наблюдаемое космологическое расстояние $l' = \frac{1}{\mathrm{H}}\ln\frac{f}{f'} = \frac{1}{\mathrm{H}}\ln(1+\mathrm{z})$, где z – параметр красного смещения; H – постоянная Хаббла. Классическая скорость удаления космологического источника $\mathrm{v} = \mathrm{H}\Lambda$, где путь фотона Λ численно равен времени T по часам приёмника, неподвижного относительно электромагнитного фона Вселенной. Наблюдаемая яркость космологического источника $\mathrm{J}' = \frac{\mathrm{P}e^{-\mathrm{v}}}{4\pi\Lambda^2}$, где P – мощность источника. Здесь яркость J' – это световая мощность, перпендикулярно падающая на единицу площади приёмника.

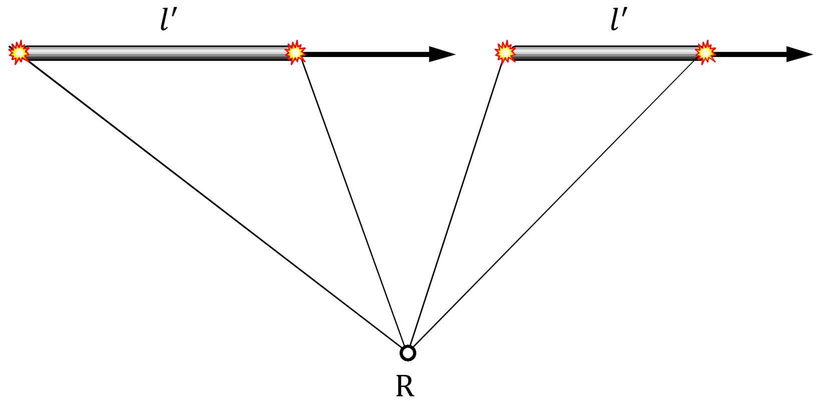
Источник, двигаясь по окружности, излучает фотоны с импульсом p. На приёмник падают фотоны с импульсом p′. Неравенство $p' < p$ не зависит от радиуса окружности. То есть, темп хода часов источника не зависит от кривизны его траектории. Двое часов, вылетев из одной точки, останутся синхронными при сохранении равенства модулей их скорости.



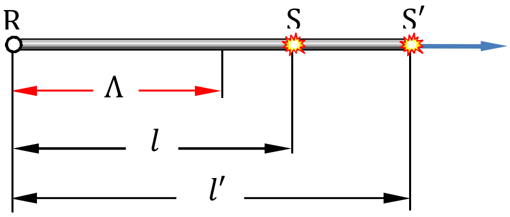
Источник движется с постоянной классической скоростью по прямой линии мимо наблюдателя. Из формулы $v' = \frac{\upsilon}{\gamma - \upsilon\cos\theta'}$ ясно, чем больше наблюдаемый угол θ', тем меньше наблюдаемая скорость источника.



Из предыдущего утверждения делаем вывод: наблюдаемая длина стержня, при его пролёте, будет плавно уменьшаться.

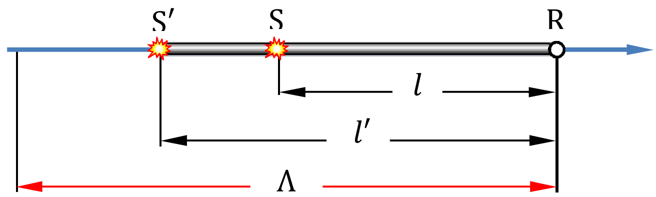


Движение стержня с постоянным ускорением



Источник впереди приёмника. Момент начала движения $\mathrm{T} = \tau_{\mathrm{R}} = \tau_{\mathrm{S}} = 0$, где T – время по часам базы; τ_{R} – время по часам приёмника; τ_{S} – время по часам источника. Ускорение концов стержня одинаковое и время $\tau_{\mathrm{R}} = \tau_{\mathrm{S}} = \tau$. При любом значении τ имеем: $\frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau - \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau' + \frac{1}{a}(\operatorname{ch} a\tau - 1) - \frac{1}{a}(\operatorname{ch} a\tau' - 1) = l$, где τ′ – наблюдаемое время источника. Очевидно, $\tau' = \frac{1}{a}\ln(\mathrm{e}^{a\tau} - al)$. Частота $f' = fe^{a\tau - a\tau'}$. Наблюдаемая длина стержня $l' = \Lambda e^{a\tau}$, где $\Lambda = \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau - \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau'$. Скорость S′ относительно R $\mathrm{v}' = \frac{\mathrm{d}l'}{\mathrm{d}\tau}$.

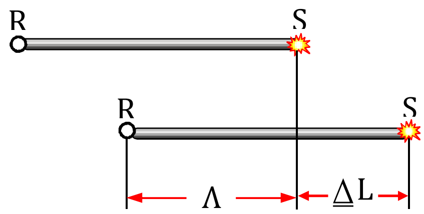
Приёмник впереди источника. Время старта $\mathrm{T} = \tau = 0$. При любом τ действуют равенства: $\frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau - \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau' - \frac{1}{a}(\operatorname{ch} a\tau - 1) + \frac{1}{a}(\operatorname{ch} a\tau' - 1) = l$, $\tau' = -\frac{1}{a}\ln(e^{-a\tau} + al)$, $l' = \Lambda e^{-a\tau}$, $f' = fe^{a\tau' - a\tau}$, $\mathrm{v}' = \frac{\mathrm{d}l'}{\mathrm{d}\tau}$. Путь фотона $\Lambda = \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau - \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau'$.



Доказательство варианта RS

При смещении стерженя на $\underline{\Delta}\mathrm{L}$ за время $\underline{\Delta}\tau$ путь фотона $\Lambda = \underline{\Delta}\mathrm{T}$. Очевидно,что $\underline{\Delta}\mathrm{T} + \underline{\Delta}\mathrm{L} = \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau - \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau' + \frac{1}{a}(\operatorname{ch} a\tau - 1) - \frac{1}{a}(\operatorname{ch} a\tau' - 1)$.

Таким же образом доказается вариант SR.



При скорости стержня $\beta \to 1$ относительно абсолютной системы отсчёта, его наблюдаемая длина растёт.

Нарастающее удаление наблюдаемого источника, в RS варианте, связано с усилением аберрации.

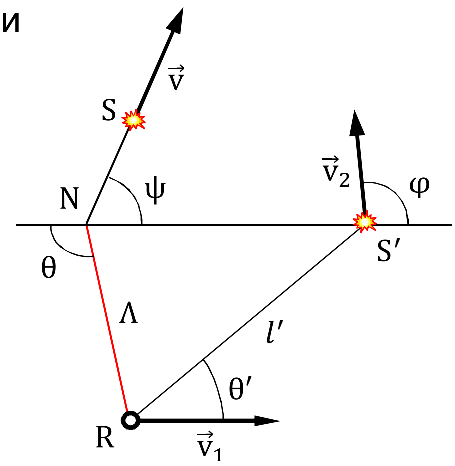
В варианте SR наблюдаемый источник удаляется из-за нарастающего отставания наблюдаемого времени источника от времени приёмника.

Примеры решения задач

1. Два корабля с синхронными часами начали движение из одной точки в базовой системе координат. Как сохранить синхронность их часов, если каждый корабль имеет свой закон движения?

Разместим на каждом корабле двое часов. Часы №1 будут показывать собственное время корабля, а часы №2 – время базовой системы отсчёта. По формуле $\mathrm{T} = \int_0^{\tau} \gamma(\tau)\, \mathrm{d}\tau$ будем подводить часы №2, чтобы они шли синхронно относительно неподвижных, базовых часов и относительно друг друга. Можно подводить часы №2 с опережением, компенсируя затраты времени на вычисления.

2. Известна абсолютная скорость приёмника и относительная скорость источника. Известны угол θ'.и расстояние l'. Найти абсолютные координаты и скорость источника.



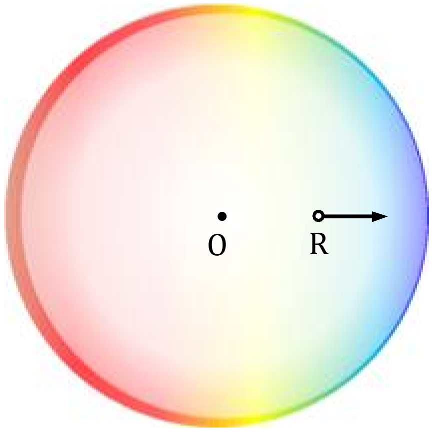
Вычислим угол $\theta = 2\,\mathrm{arctg}\left(e^{\mathrm{v}_1}\,\mathrm{tg}\frac{\theta'}{2}\right)$.
Вычислим путь фотона $\Lambda = l'(\gamma_1 - \upsilon_1 \cos\theta')$.
Модуль абсолютной скорости источника даст формула: $\upsilon = \upsilon_2\sqrt{\left(\gamma_1\cos\varphi + \frac{\upsilon_1}{\beta_2}\right)^2 + \sin^2\varphi}$.

Угол ψ легко извлечь из формулы $\cos\psi = \frac{\upsilon_2}{\upsilon}\left(\gamma_1\cos\varphi + \frac{\upsilon_1}{\beta_2}\right)$. Отрезок NS в базовой системе отсчёта равен $\beta\mathrm{T}$. Время T численно равно Λ.

3. Сколько лететь до Тау Кита по часам корабля и по часам Земли, если первую половину пути корабль набирает скорость, а вторую половину тормозит с земным ускорением? Какую массу будет иметь корабль на финише, если он – фотонная ракета, а его стартовая масса m_0=100000 тонн?

Полный путь $2\mathrm{L} = 3{,}76 \cdot 10^8$ с. Земное ускорение $a = 3{,}27 \cdot 10^{-8}\, c^{-1}$. Время ускорения равно времени торможения. Полное время полёта по часам корабля $2\tau = \frac{2}{a}\mathrm{Arch}(1 + a\mathrm{L}) = 162400000\, c$ (5,15 лет), а по часам Земли $2\mathrm{T} = \frac{2}{a}\mathrm{sh}\, a\tau = 4{,}33 \cdot 10^8\, c$ (13,7 лет). Полная скорость корабля-ракеты (разгон и торможение) $2\mathrm{v} = 2\,\mathrm{Arch}(1 + a\mathrm{L}) = \ln\frac{\mathrm{m}_0}{\mathrm{m}}$. Конечная масса $\mathrm{m} = \mathrm{m}_0 e^{-2\mathrm{v}} = 494$ тонны.

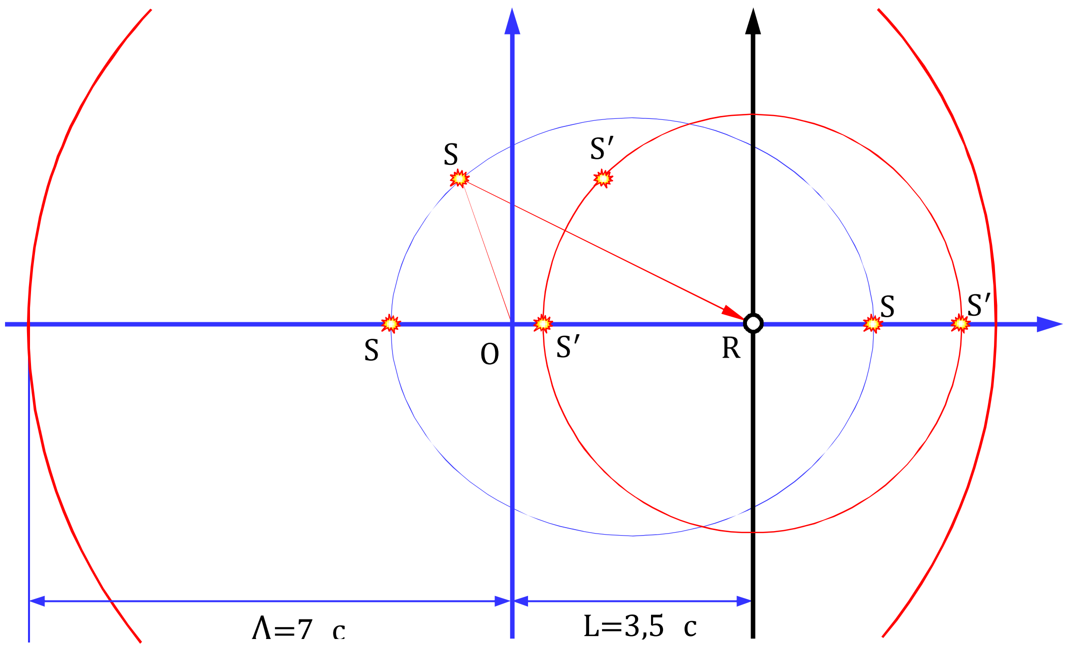
4. НЛО взорвался, когда поравнялся с точкой O неподвижной системы координат. Вспышка озарила пылевую туманность и была видна в отражённом свете в виде цветного пузыря.



Рассмотрим отпечаток светового пузыря в неподвижных координатах. Слева оболочка толстая и тускло-красная, а справа – тонкая и ярко-синяя. В центре точка O.

За распределение цветов отвечает эффект Доплера. Сам эффект Доплера является следствием того, что наблюдаемый темп хода часов источника зависит от модуля относительной скорости и направления наблюдения. Понятно, что толщина оболочки пузыря с разных сторон будет разной. Точка O будет в центре потому, что скорость света не зависит от скорости источника или приёмника. Чёрный ящик R показал, что он был в центре светового фронта, а точка O летела к красному свету. Как разрешить этот парадокс?

Объясняется это действием аберрации света (она действует даже тогда, когда источник, приёмник и вектор относительной скорости находятся на одной прямой). Пусть скорость чёрного ящика после взрыва $\beta = 0{,}5$, тогда малая окружность справа – световой фронт, наблюдаемый из точки R в момент времени T=7 с ($\tau = 6{,}062$ с).



5. Где находится наблюдаемый «центр» Вселенной? Абсолютная скорость Солнечной системы $\mathrm{v}=0{,}00123$ Неподвижная точка пространства, из которой «вытекают» галактики находится от нас, по курсу движения, на расстоянии $l' = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{H}} = 5{,}6 \cdot 10^{14}$ с (18 млн. св. лет).

6. Какую скорость нужно иметь относительно космического фона, чтобы он в направлении движения светился, как солнечный диск?

Температура поверхности Солнца 5778 K. Температура космического фонового излучения 2,725 K. Классическая скорость: $\mathrm{v} = \ln\frac{5778}{2{,}725} = 7{,}66.$

7. С какой скоростью должен удаляться космологический источник, чтобы слиться с тепловым фоном Вселенной? Какое при этом будет наблюдаемое и реальное расстояние до источника?

Будем считать, что источник похож на Солнце. Это даст нам классическую скорость $7{,}66$. Наблюдаемое расстояние будет $l' = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{H}} = 3{,}48 \cdot 10^{18}$ с $(110$ миллиардов св. лет). Наблюдаемая скорость удаления источника не может превышать ½. Реальная скорость удаления, в этом случае, $\beta \to 1$. Значит галактики, свет которых не отличим от реликтового излучения, прячутся от нас на реальном расстоянии 220 миллиардов световых лет.

8. На какой круговой орбите часы спутника Земли будут идти синхронно с часами на Земле? Вращением Земли пренебречь.

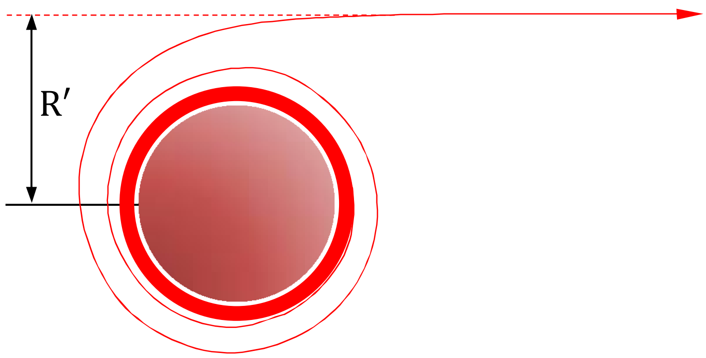
Орбитальная скорость замедляет часы спутника, а высота орбиты ускоряет их относительно земных часов. Оба фактора компенсируют друг друга при соблюдении равенства: $\frac{\beta}{\upsilon}\left(1 - \frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{R}}\right) = 1 - \frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{r}}$. Искомый радиус орбиты $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{Gm}}{1-\left(1-\frac{\mathrm{Gm}}{\mathrm{r}}\right)^{2/3}} = 1{,}5\mathrm{r} = 0{,}031877$ с. Орбита высотой $0{,}5\mathrm{r}$ (r – радиус Земли) наилучшая для размещения спутников системы навигации и связи.

9. Радиус ядра неактивного квазара в центре Млечного Пути $\mathrm{R} = \mathrm{Gm} = 21{,}2$ с. Фотон стартовал с высоты $\mathrm{h} = 10^{-11}$ с (3 мм) параллельно поверхности ядра. Какой будет траектория фотона?

Угол отклонения траектории, в данном случае, $\theta = \frac{2\mathrm{Gm}}{\mathrm{R+h-Gm}} = 4{,}24 \cdot 10^{12}$ радиан. Фотон буде кружить вокруг ядра, поднимаясь по спирали.

10. Сколько времени нужно фотону в задаче №9, чтобы преодолеть гравитацию? Каким будет наблюдаемый радиус ядра квазара?

Нет сомнений, что наблюдаемый радиус $\mathrm{R}' > \mathrm{Gm}$. Оценим время движения фотона. Длина витка спирали примерно равна $2\pi\mathrm{R}$. Число витков $\frac{4{,}24\cdot10^{12}}{2\pi}$. Путь фотона $\Lambda \approx 21{,}2 \cdot 4{,}24 \cdot 10^{12}$ с. Время движения фотона по этому пути около 3000000 лет.



Единицы и константы со световой секундой, как единицей длины

Длина – секунда (с)
Время – секунда (с)
Скорость – безразмерна
Ускорение – $с^{-1}$
Частота – герц (Гц)
Масса – килограмм (кг)
Энергия – килограмм (кг)
Импульс – килограмм (кг)
Сила – кг/с
Мощность кг/с
Плотность $кг/с^3$
Яркость $кг/с^3$
Электрический заряд – кулон (Кл)
Магнитная индукция – тесла (Тл)

Гравитационная постоянная $\mathrm{G} = 2{,}477 \cdot 10^{-36}$ с/кг

Постоянная Хаббла $\mathrm{H} = 2{,}2 \cdot 10^{-18}\ c^{-1}$

Постоянная Планка $\mathrm{h} = 7{,}3724972 \cdot 10^{-51}$ кг · с