Спин как предельный момент импульса.

«Пределов не знают крайности, а ограниченность (она же глупость) не знает пределов.»

Е. В. Антонюк

Наши соплеменники давно уже оценили преимущества универсализма. Весьма полезно иметь универсальные вещи , или приемы , независимо от сферы их применения. Наука в этом смысле не исключение , даже более , именно она основной поставщик этого ходового товара . Многие склонны считать что это и есть основной смысл ее аскетичного существования , дабы в остальном забыть про аскетизм и неудобства . За всех мы не скажем , но за физику можем . В физике , за многие века , выработан универсальный способ получения уравнений движения . Способ именован как – принцип наименьшего действия s . Применительно к механике он формулируется следующим образом . Пусть механическая система описывается некоторой функцией L координат r ,скоростей v и времени t , то есть в математической формулировке функцией $L(r,v,t)$. Эта функция есть обобщением опытных фактов , согласно которым механическое состояние физической системы полностью определяется заданием координат и скоростей ее элементов . Этим набором полностью определяется ее эволюция во времени . Эта эволюция и удовлетворяет принципу наименьшего действия , согласно которому интеграл от функции $L(r,v,t)$, называемой функцией Лагранжа , или просто лагранжианом , взятому между моментами времени t_1,t_2 должен быть минимальным .

$$s=\int_{t_1}^{t_2} L(r,v,t)\,dt=\min\ ;(1)$$

, задачу решают так называемые уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial L}{r}=0\ ;(2)$$

, которые являются обобщением уравнения Ньютона $F=ma$ на случай произвольной системы координат , сами уравнения Ньютона годны лишь для декартовой системы , что не всегда удобно. Это слишком математизированная формулировка. Более физическая формулировка гласит , между моментами времени t_1,t_2 система движется таким образом , чтобы интеграл (1) был минимален .Мы не будем расписывать подробно функцию Лагранжа , и показывать как она ведет к уравнения Ньютона в декартовой системе координат . Более доступная трактовка принципа наименьшего действия такова , элементы механической системы движутся по тем траекториям длина которых минимально возможна . В частности, для свободного тела такая траектория есть прямая , кратчайшая линия между двумя точками.

Удивительно то что принцип наименьшего действия может быть с успехом применен не только в механике , но и в любом другом разделе физики как то электродинамика , ОТО Эйнштейна , слабое и сильное ядерные взаимодействия . Собственно основная работа теоретиков сводится к поиску подходящего лагранжиана , описывающего такие взаимодействия , уравнения движения могут быть получены его варьированием, так как задача на минимум интеграла является задачей вариационного исчисления .

Очень удобный метод , не правда ли ? Однако в нем есть изначальный изъян. Заключается он в том что его обязательным условием является <u>поступательное</u> движение между моментами времени t_1, t_2. Но движение этим отнюдь не исчерпывается . В методе наименьшего действия не учитывается вращение механической системы , как целого , или отдельных ее элементов – физических тел. Впрочем в механике учитывается поворот всей системы как целого , ведущий к закону сохранения момента импульса , но для ее отдельных элементов такого учета нет . В результате элементарная задача на вращение волчка – детской юлы , сталкивается с непреодолимыми до сих пор вычислительными трудностями ! Один из вариантов ее решения был найден С.Ковалевской , и одного этого оказалось достаточным чтобы ее имя было сохранено для потомков , но к ее чести у нее имеются и другие важные заслуги. Складывается любопытная ситуация , мы имеем универсальный метод получения уравнений движения – метод наименьшего действия , но этот метод , в общем случае , не учитывает вращений !?

Следствием принципа наименьшего действия в механике является принцип относительности. В уравнении Лагранжа (2) член $\frac{\partial L}{r} = F$, имеет смысл силы . При $\frac{\partial L}{r} = F = 0$, уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = 0 ;(3)$$

,траекторией такого движения является прямая , а само движение есть движением с постоянной скоростью . Отсюда следует утверждение , системы без воздействия силы движутся , как целое, прямолинейно и равномерно .

Однако Эйнштейн предложил считать принцип относительности не менее универсальным методом чем принцип наименьшего действия. Мы выясним какой из этих принципов главнее .

Принцип наименьшего действия имеет математическую формулировку (1) , а вот принцип относительности , увы , нет . Следовательно достаточно объективное сравнение этих принципов невозможно . Однако это легко устранимо . Выразить принцип относительности математически весьма просто . Из (2) следует что общим признаком принципа относительности есть отсутствие поступательного ускорения физической системы как целого , ведь $F = ma = 0$, и если масса системы $m \neq 0$, та ее ускорение $a = 0$. Но , ускорение есть вторая полная производная по времени от функции координат $r(t)$,зависящих в общем случае от времени , и t времени, независимой переменной. Написав эту функцию в виде $S(r(t),t)$, пишем для нее условие принципа относительности , которое гласит , ускорение системы , то бишь величина d^2S/dt^2 , должно быть равно нулю

$$\frac{d^2S[r(t),t]}{dt^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 S}{\partial r \partial t}\left(\frac{dr}{dt}\right) + \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0 \text{ ;(4)}$$

, учтя что $dr/dt = v$ есть скорость , перепишем (4) в виде $dr/dt = v$

$$\frac{d^2S[r(t),t]}{dt^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2}v^2 + 2\frac{\partial^2 S}{\partial r \partial t}v + \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0 \text{ ;(5)}$$

Получили уравнение нелинейное по скорости v , отсюда немедленно следует что скорость имеет предел. Чтобы найти его дифференцируем (5) по скорости .

$$\frac{d}{dv}\left\{\frac{d^2S[r(t),t]}{dt^2}\right\} = \frac{d}{dv}\left\{\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}v^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial r \partial t}v + \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right\} = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2}v + \frac{\partial^2 S}{\partial r \partial t} = 0 \text{ ;(6)}$$

, получая условие экстремума скорости автоматически , очевидно предел скорости есть

$$v = -\frac{\partial^2 S}{\partial r \partial t}\Bigg/\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} \text{ ;(7)}$$

Однако мы вновь совершаем прошлую ошибку , наш принцип относительности не учитывает вращение. Между тем физическая система может вращаться и при отсутствии ее поступательного ускорения , как целого . Тот же самый волчок может вращаться «на месте» , без поступательного движения , а значит и поступательного ускорения . Можно показать что законы вращения для всех волчков одинаковы . Отсюда следует что вращение также подчиняется принципу относительности .

Нам остается только ввести вращение в принцип относительности . Примем что поворот физической системы , как целого , или ее отдельного элемента , описывается углом поворота β , который в общем случае зависит от времени $\beta(t)$.Эта зависимость , в частности , проявляется как увеличение во времени оборотов ДВС при нажатии на педаль газу на тачке без колес . Эту зависимость введем в функцию состояния системы в виде , $S\left[r(t),\beta(t),t\right]$. Принцип относительности для такой функции математически есть выражение

$$\frac{d^2 S\left[r(t),\beta(t),t\right]}{dt^2}=\left(\frac{\partial}{\partial r}v+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 S=0\ ;(8)$$

, принято считать что $d\beta/dt=\omega$ есть угловая скорость , тогда (8) переписывается в виде

$$\frac{d^2 S\left[r(t),\beta(t),t\right]}{dt^2}=\left(\frac{\partial}{\partial r}v+\frac{\partial}{\partial\beta}\omega+\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 S=0\ ;(9)$$

В частности при $v=0$, имеем для угловой скорости уравнение аналогичное (5)

$$\frac{d^2 S\left[\beta(t),t\right]}{dt^2}=\frac{\partial^2 S}{\partial\beta^2}\omega^2+2\frac{\partial^2 S}{\partial\beta\partial t}\omega+\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}=0\ ;(10)$$

Откуда немедленно следует что и угловая скорость в природе имеет предел, который мы найдем дифференцируя (10) по ω .

$$\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{d^2 S\left[\beta(t),t\right]}{dt^2}\right\}=\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{\partial^2 S}{\partial\beta^2}\omega^2+\frac{\partial^2 S}{\partial\beta\partial t}\omega+\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right\}=\frac{\partial^2 S}{\partial\beta^2}\omega+\frac{\partial^2 S}{\partial\beta\partial t}=0\ ;(11)$$

$$\omega=-\frac{\partial^2 S}{\partial\beta\partial t}\Bigg/\frac{\partial^2 S}{\partial\beta^2}\ ;(12)$$

Вообще говоря существование предела угловой скорости эффект в теории совершенно новый . Чтобы выяснить что это за предел , и с чем он может быть связан физически, ищем решения уравнения (10).

$$S_1=\cos(\beta-\omega t)\sin(\beta-\omega t)\ ;(12)$$

$$S_2=\cos(\beta-\omega t)+\sin(\beta-\omega t)\ ;(13)$$

Но согласно известному тождеству

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\ ;(14)$$

Наши решения могут быть выражены друг через друга посредством

$$S=\cos(\beta-\omega t)\sin(\beta-\omega t)+\cos(\beta-\omega t)\sin(\beta-\omega t)=\sin(2\beta-2\omega t)\ ;(15)$$

Физически это означает что два таких состояния могут переходить друг в друга , и отличаются лишь на величину удвоенной угловой скорости , что равносильно удвоенной разнице в моменте импульса. Следует иметь ввиду что в выражении (15) ω имеет смысл угловой скорости чисто условно , скорее это характеристика колебания. Уравнение (15) утверждает что две частицы , с единичным моментом импульса , равносильны одной частице , с удвоенной единицей момента импульса. На опыте это проявляется как распад γ - фотона , с собственным моментом импульса – спином равным 1, на две частицы с собственными моментами импульса- спинами , равными $\frac{1}{2}$, электрон и позитрон . Таким образом , опыт показывает что предельной единицей момента импульса является спин элементарных частиц , связь с пределом скорости c проявляется в том что спин величина релятивистская , и величина спина , в отличие от других механических величин , от скорости не зависит. Последний факт положен в основу всей квантовой теории поля .

Таким образом , в принцип относительности , непротиворечивым способом , можно ввести вращение системы , или ее отдельных элементов , что делает этот принцип более могущественным по сравнению с принципом наименьшего действия.

Сметанников А.И. 7.XI.2018