«Блестящий математический формализм» с «привидениями»

Кулигин В.А. Каф. электроники, физ. ф-т, Воронежский ГУ, Университетская пл. 1, Воронеж, 394018, Россия; e-mail: vctor_kuligin@mail.ru

Аннотация. Показано, что релятивистский интеграл действия не имеет экстремумов. Благодаря этому факту надежных уравнений движения и законов сохранения не существует в рамках релятивистских представлений.

1.Введение

Я люблю математику. В ней есть своя логика и поэзия. Удивительно увлекательное занятие – плыть по волнам логического формализма и открывать для себя неизвестные островки знаний. Иногда они напоминают ботанический сад с пальмами, соснами, лианами и орхидеями. Но иногда встречаются острова, внешне имеющие привлекательный вид, а внутри напоминающие помойку.

Копаться в грязи, исправляя ошибки, занятие не привлекательное. Но оно необходимо, чтобы расчистить путь новым научным исследованиям, чтобы не занести бациллы ошибок в новые результаты.

В современной физической литературе очень часто говорится о «блестящем математическом формализме», положенном в основу релятивистских теорий и, в частности, в основу Специальной теории относительности (СТО). Механика СТО разрабатывалась как обобщение принципа Гамильтона для 4-пространства. Анализ «принципа наименьшего действия релятивистской механики» есть та помойка, которую нам предстоит ликвидировать. Занятие не из приятных, но весьма важное и нужное.

2.Классический интеграл действия[1]

Мы начнем с краткого описания классического интеграла действия, чтобы затем использовать его для сравнения с релятивистским интегралом действия. Классический интеграл действия имеет следующий вид:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) dt \tag{2.1}$$

где $L = K - U$ – функция Лагранжа для частицы, на которую действует внешнее поле; K – кинетическая энергия частицы и U – потенциальная энергия взаимодействия.

Интеграл действия это функционал. Он имеет минимум, если интегрирование ведется вдоль истинной траектории движения частицы. Это означает, что вариация интеграла действия δS, должна быть равна нулю вдоль этой траектории.

Чтобы определить траекторию частицы мы должны получить из интеграла действия уравнение движения частицы (уравнение Эйлера). Это уравнение ищется путем варьирования координаты частицы **r** так, чтобы выполнялось условие минимума интеграла действия (2.1), т.е. $\delta S = 0$. При этом время t рассматривается как постоянный параметр: $\delta t = 0$, и пределы интегрирования действия S фиксированы. Окончательная форма вариации интеграла действия имеет вид:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta \mathbf{r} dt \tag{2.2}$$

Поскольку $\delta \mathbf{r}$ это произвольная переменная, условие $\delta S = 0$ выполняется, если равно нулю подынтегральное выражение.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \tag{2.3}$$

Известно, что уравнение (2.3) есть уравнение движения частицы. Интеграл действия имеет минимум, если траектория частицы описана этим уравнением.

[1] Хорошее изложение принципа наименьшего действия можно найти у Фейнмана [1].

3.«Майдан» в физике

На рубеже 19-20 веков в физике произошел «майданный переворот». Я употребляю этот термин по аналогии, хотя киевский майдан прошел на 100 лет позже. Это была «революция в физике». Для нее тогда созрели необходимые условия, но кто использовал сложившуюся ситуацию и стал «кукловодом» мы можем только догадываться.

Итак, кратко об исторической обстановке.

- **1873 г.** Вышел капитальный двухтомный труд Максвелла «**Трактат об электричестве и магнетизме**».

До Максвелла в классической механике господствовала теория тяготения Ньютона, опиравшаяся на мгновенное действие на расстоянии. В то же время параллельно развивалась геометрическая и волновая оптика (Юнг, Ньютон, Френель и др.). Возникло два взгляда на причинность при описании взаимодействия объектов: мгновенное действие на расстоянии (теория дальнодействия) и теория близкодействия.

Как было показано в [2] обе точки зрения правомерны, но каждая из них имеет свою область применения. В тот период материалистическое мировоззрение оказалось в глубоком застое. Субъективно идеалистический позитивизм заполнял философский «вакуум». Поэтому правильное понимание решения проблемы отсутствовало.

Вместо разрешения возникшего диалектического противоречия [3]. возникла конфронтация точек зрения, т.е. непримиримое противостояние между двумя направлениями: либо дальнодействие, либо близкодействие. Максвелл придерживался точки зрения Фарадея, т.е. был сторонником близкодействия. По этой причине он добавил в уравнения электродинамики не только кулоновский ток смещения, но и фарадеевский ток смещения. В результате потенциалы и поля в уравнениях Максвелла стали запаздывающими.

Следует отметить важное обстоятельство. С возникновением механики начала развиваться техника (паровые машины и т.д.). Понадобился класс не только ученых-профессионалов, но и инженерно-технических работников. Возник класс молодых, жаждущих славы ученых. Конструировалась новая измерительная аппаратура, поэтому возросли возможности проведения экспериментальных исследований.

- **1888 г.** Г. Герц. Экспериментальное доказательство существования электромагнитных волн.

Генрих Герц был сторонником дальнодействия. Однако, проведя эксперименты, он обнаружил запаздывание потенциалов. Хотя эксперимент подтверждал близкодействие, но не отвергал дальнодействия, сторонники близкодействия, восприняли результаты, как опровержение дальнодействия. В среде физиков была атмосфера эйфории. Действительно, они «поправили» самого Ньютона!

Новые результаты посыпались как «из рога изобилия»:

- **1895 г.** Открытие рентгеновского излучения (В. К. Рентген)
- **1896 г.** Открытие радиоактивности (А. А. Беккерель). Эффект Зеемана.
- **1897 г**. Открытие электрона (Дж. Дж. Томсон)
- **1898 г**. Открытие радия (П. и М. Кюри)
- **1899 г.** Разделение радиоактивного излучения на компоненты: альфа-, бета- и гамма-излучение (П. Виллар, Э. Резерфорд).
- **1911 г**. Открытие сверхпроводимости металлов (Х. Камерлинг-Оннес). Открытие атомного ядра, планетарная модель атома (Э. Резерфорд)
- 1919 г. Искусственная ядерная реакция, открытие протона (Э. Резерфорд)
- **1921 г.** Открытие ядерной изомерии (О. Ган)
- **1921—1922 гг.** — Открытие спина (О. Штерн, В. Герлах)
- **1932 г**. Открытие нейтрона (Дж. Чедвик). Открытие позитрона (К. Д. Андерсон) и т.д.

Молодые физики, опиравшиеся в основном на классическую механику и оптику, не смогли «переварить результаты», т.е. дать объяснения новым экспериментальным открытиям. Чтобы как-то оправдать свою беспомощность, они выдвинули предположение, что причина в *ограниченности* классической механики. Поскольку классическая механика опиралась на дальнодействие, физики приняли *самонадеянное* решение признать «ограниченность и приближенный характер» классической механики и *изгнать из науки* мгновенное действие на расстоянии.

Это была **фатальная ошибка,** ставшая на долгие годы предрассудком и положившая начало кризису, затянувшемуся более, чем на столетие.

4.Релятивистский интеграл действия

«Придавив» классическую механику, молодые ученые должны были построить что-то новое. Математический формализм релятивистской механики начал строился по образу и подобию классической. Ученые, хотя и пренебрежительно относились к классической механике, другого пути не видели. Критерием правильности результатов служил принцип соответствия. При $v << c$ математический формализм принципа наименьшего действия релятивистской механики должен был переходить в математический формализм принципа наименьшего действия классической. Поэтому форма релятивистского интеграла действия стала подражанием выражению (2.1).

$$S = \frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2} L(x_i, u_i)ds \qquad (4.1)$$

где: L – функция Лагранжа для частицы, на которую действует внешнее поле; c – скорость света; x_i – 4-координата частицы (ict, x, y, z); u_i – 4-вектор скорости частицы;

$$ds = \sqrt{-(dx_i)^2} = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = c\sqrt{1-(c/v)^2}\,dt \qquad (4.2)$$

Известно, что 4-координата x_i зависит от s, и при дифференцировании ее по s мы имеем 4-скорость частицы.

$$x_i = x_i(s), \quad u_i = \frac{dx_i}{ds} = u_i(\mathrm{s}) \qquad (4.3)$$

Таким образом, параметр s должен играть ту же роль, что и параметр t в классической теории.

Изучая литературу, мы столкнулись с несколькими вариантами построения интеграла действия релятивистской механики (см. [4], [5], [6]), два из которых будут рассмотрены ниже.

Первый вариант. Он изложен в [4]. Здесь параметр s **подобен параметру** t в классической механике. При варьировании интеграла действия он, как и t, остается неизменным ($\delta ds = 0$). В результате мы имеем уравнение движения частицы по форме полностью соответствующее классическому уравнению (4.3)

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial u_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \qquad (4.4)$$

Итак, внешняя форма соблюдена, и мы можем рассмотреть ее содержание на конкретном примере. Автор [4] для заряда в магнитном поле предлагают следующее выражение функции Лагранжа:

$$L = \frac{m_0 c^2 u_i^2}{2} + e u_i A_i \qquad (4.5)$$

где: e и m заряд и масса заряда соответственно; u_i – 4-вектор скорости частицы; A_i – 4-потенциал электромагнитного поля.

Используя уравнение (4.4), нетрудно найти следующее уравнение движения для заряда:

$$\frac{d}{ds}\left(m_0 c^2 u_i\right) = e\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right) u_k \qquad (4.6)$$

Это и есть релятивистское уравнение движения (формула Лоренца), которое при $v << c$ переходит в известное классическое уравнение:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathrm{grad}\phi - e\frac{d\mathbf{A}}{dt} + e\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{A} ,$$

где $\mathbf{A}$ и φ – потенциалы электромагнитного поля; $\mathbf{v}$ – скорость заряда.

Как в песне: «Все хорошо, прекрасная маркиза!» Однако проблемы полезли «как шило из мешка».

5.«Привидения» в уравнениях движения

Казалось бы, все прекрасно, но существует обстоятельство, свидетельствующее не в пользу этого варианта. В СТО есть важное тождество

$$(u_i)^2 + 1 = u_t^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2 + 1 = 0 \qquad (5.1)$$

Учитывая это соотношение, можно показать, что выражение (4.8) фактически *не соответствует* своему аналогу (4.5). Оно имеет вид в «классическом варианте»:

$$L_1 = -\frac{m_0 c^2}{2} + e u_i A_i = L \qquad (5.2)$$

Очевидно, что из него мы не можем получить уравнение движения (4.6).

Более того, мы можем записать много других новых функций Лагранжа, которые <u>равны</u> предшествующей функции Лагранжа (4.5), и из них мы можем получить много других различных уравнений движения. Например, пусть функция Лагранжа равна:

$$L = \frac{m_0 c^2 u_i^2}{2} + eu_i A_i$$

Мы ее можем записать в следующем виде:

$$L = \frac{m_0 c^2 u_i^2}{2} + eu_i A_i = \frac{m_0 c^2 u_i^{2K} (-1)^{K+1}}{2} + eu_i^{2N+1} (-1)^N A_i + \left(u_i^2 + 1\right)\Phi(x_i, u_i) \quad (5.3)$$

где: N и K – положительные целые числа (N, K = 0; 1; 2;...); Φ (x_i; u_i) – произвольная скалярная функция.

Легко убедиться, что введение новых множителей и новых слагаемых не меняет функцию Лагранжа. Действительно

$$u_i^{2K} (-1)^{K+1} = u_i^2; \quad u_i^{2N+1} (-1)^N = u_i; \quad \left(u_i^2 + 1\right) = 0$$

Однако в правую часть уравнения движения теперь входят «добавки»:

$$\frac{d}{ds}\left[m_0 c^2 Ku + 2NeA_i + 2\Phi(x_i, u_i) u_i\right] = \mathrm{e}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_m} - \frac{\partial A_m}{\partial x_i}\right) u_m \quad (5.4)$$

Все эти «добавки» мы назовем «привидениями». Теперь мы уже не можем быть уверены в том, что формула Лоренца (4.6) не содержит внутри себя скрытых «привидений»! Итак, мы можем получить *много различных* уравнений движения, изменяя K, N и Φ. При этом функция Лагранжа будет фактически той же самой! Почему это многообразие уравнений, влекущее неоднозначность, имеет место, и какое именно уравнение из этого множества является правильным (истинным)?

Возможно, это связано с тем, что переменная s в СТО не может рассматриваться как независимая переменная подобно t в механике Ньютона. Действительно, с одной стороны, s зависит от x_i (4.2), с другой, x_i должен зависеть от s (4.3). Благодаря этому, условия для применения вариационного исчисления нарушены. По этой причине рассмотренный выше вариант **не может** служить основой для математического формализма СТО, реализующего принцип наименьшего действия.

И еще проблема: мы не можем получить классический интеграл действия (4.5), если $v << c$. Из (4.5) мы, например, имеем:

$$S=\frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{m_0c^2u_i^2}{2}+eu_iA_i\right)ds\ \cong\int_{\mathbf{t_1}}^{\mathbf{t_2}}\left(-\frac{m_0c^2}{2}-e\varphi+\mathrm{e}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right)dt \qquad (5.5)$$

А куда «пропала» кинетическая энергия заряда?

Предельный переход от релятивистского интеграла действия к классическому интегралу не имеет места. Итак, в отличие от классической механики релятивистский интеграл действия дает множество различных уравнений движения, и неизвестно: какое из них отвечает объективной реальности, т.е. реализует минимум интеграла действия?

Второй вариант. Другая версия интеграла действия приводится в учебнике [5]. Авторы [5] хорошо понимают, что s зависит от x_i, т.е. $\delta ds\neq 0$. Они предлагают новый вариант интеграла действия:

$$S=\frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}(-m_0c^2ds+eA_idx_i)=\frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}(-m_0c^2+eA_iu_i)ds=\frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}Lds \qquad (5.8)$$

Теперь они выводят из (5.8) <u>*как бы*</u> «правильный» классический интеграл действия:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{m_0v^2}{2}-e\varphi+e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{m_0v^2}{2}-e\varphi+e\varphi(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)/c^2\right)dt \qquad (4.13)$$

Однако это тоже неверное приближение выражения (5.8). Авторы допускают ошибку. Произведение eA_iu_i равно:

$$eA_iu_i=e\varphi u_i^{(1)}u_i^{(2)}=\left(\frac{ic-\mathbf{v}_1}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}}\cdot\frac{ic-\mathbf{v}_2}{\sqrt{1-(v_2/c)^2}}\right)\approx -e\varphi[1+\frac{1}{2}(v_{12}/c)^2]$$

Вернемся к выражению (5.8)

$$S=\frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}(-m_0c^2ds+eA_idx_i)=\frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}(-m_0c^2+eA_iu_i)ds=\frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}Lds$$

Варьирование дает следующий результат

$$\delta S=\frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}\left[-\frac{d}{ds}m_0cu_i+e\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right)u_k\right]\delta x_i ds \qquad (5.9)$$

В силу произвольности δx_i, как пишется в [5], выражение под интегралом (5.9) равно нулю

$$\left[-\frac{d}{ds}m_0cu_i+e\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right)u_k\right]\delta x_i=0 \qquad (5.10)$$

Из (5.10) следует уравнение движения (формула Лоренца для заряда в поле):

$$\frac{d}{ds}m_0cu_i=e\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right)u_k \qquad (5.11)$$

Кажется, что все правильно и хорошо. Все релятивисты рады и пляшут! Но авторы понимают иллюзорность результата. Они пишут, что к выражению для силы Лоренца *можно добавить любой член*, ортогональный к δx_i. Итак, даже здесь «привидения» в уравнениях преследуют ученых. Можно было бы, как в предыдущем случае, показать неоднозначность уравнения движения и описать сопутствующие ему «привидения». Но это не добавит нового.

6.Ортогональность, но не произвольность

Чтобы понять причины неудач в построении релятивистского интеграла действия, рассмотрим общий вид вариации релятивистского интеграла действия.

Второй вариант [5]. Обратимся к вариации интеграла действия (5.9)

$$\delta S=\frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}\left[-\frac{d}{ds}m_0cu_i+e\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right)u_k\right]\delta x_i ds=\frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}G_i\delta x_i ds$$

Подынтегральное выражение представляет собой скалярное произведение «уравнения движения» G_i (выражение а квадратных скобках) на вариацию 4-вектора δx_i. Это общая форма подынтегрального выражения. В [5] утверждается, что «*в силу произвольности 4-вектора* δx_i *уравнение движения* G_i *должно быть равно нулю*». Минимум интеграла действия реализуется на экстремалях, определяемых из решения «уравнения движения» $G_i=0$.

На самом деле это утверждение либо ошибка, либо подгонка под нужный результат. Ниже мы покажем это.

Из равенства нулю скалярного произведения ($G_i \cdot \delta x_i = 0$) вовсе не следует, что один из сомножителей равен нулю. Тождество $G_i \cdot \delta x_i = 0$ не изменится , если к «уравнению движения» добавить любое слагаемое, ортогональное к δx_i , например a_i . Тогда имеем $(G_i + a_i) \cdot \delta x_i = 0$. Слагаемое a_i и есть «привидение», варианты которого могут входить также в само уравнение $G_i = 0$.

Можно предложить другой вариант. Запишем вариацию интеграла действия для этого варианта.

$$\delta S = \delta \int_{s_1}^{s_2} L ds = \int_{s_1}^{s_2} \left(ds \cdot \delta L + L \cdot \delta ds \right) = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{dL}{ds} \cdot \delta s ds + L \cdot \delta ds \right) \quad (6.1)$$

Как и в предыдущем случае, мы проинтегрируем первый член в интеграле действия по частям.

$$\delta S = L\delta s \Big|_{s_1}^{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} (-L \cdot d\delta s + L \cdot \delta ds) = L\delta s \Big|_{s_1}^{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} L \cdot (\delta ds - d\delta s) = 0 \quad (6.2)$$

Первый член правой части равен нулю, поскольку концы траектории s_1 и s_2 жестко фиксированы и вариация в этих точках равна нулю по условиям вариации. Второй член (интеграл) тождественно равен нулю по результату подынтегрального выражения. Интеграл действия для второго варианта не имеет экстремумов. Его значение зависит только от пределов интегрирования и не зависит от формы кривой. *Принцип наименьшего действия не имеет места.*

Теперь нам необходимо понять причину постоянства интеграла действия. Рассмотрим изменение длины отрезка x_i при бесконечно малой вариации δx_i. Длина вариации $\delta s_{(i)}$ отлична от нуля, т.е. $\delta s_{(i)} = \sqrt{-(\delta x_i)^2} \neq 0$.

Сравним длины отрезка x_i до и после варьирования, т.е сравним $s_{(i)}$ и $s_{(k)}$.

Отрезок $s_{(i)} = \sqrt{-(x_i)^2}$

Дадим малое приращение 4-вектору x_i

$x_k = x_i + \delta x_i$ (6.3)

Вычислим длину отрезков при малых возмущениях. С одной стороны

$$s_{(k)} = \sqrt{-(x_i + \delta x_i)^2} \approx s_{(i)} - x_i \delta x_i / s_{(i)} \qquad (6.4)$$

С другой стороны, изменение 4-отрезка в рамках преобразования Лоренца не может быть произвольным. Существует жесткое условие:

$x_k = \alpha_{ki} x_i$ (6.5)

где α_{ki} – матрица преобразования Лоренца

Из (6.5) следует, что 4-вектор вращается в 4-пространстве, и 4-длины сравниваемых отрезков должны быть равны друг другу, т.е. $s_{(k)} = s_{(i)}$. Применяя это соотношение к выражению (6.4), получим:

$x_i \delta x_i = 0.$ (6.6)

Иными словами, вариация δx_i всегда должна быть ортогональна 4-вектору x_i. Это соответствует обычному повороту 4-вектора в 4-пространстве или переходу 4-вектора из одной инерциальной системы отсчета в другую без изменения длины.

Этот ожидаемый результат очевиден. Длины **любых** 4-векторов являются истинными скалярами (инвариантами преобразования Лоренца), т.е. величинами, не зависящими от выбора системы отсчета. В силу этого любое 4-приращение вектора будет всегда ортогонально 4-вектору.

Поскольку релятивистская функция Лагранжа формируется из инвариантов (истинных скаляров), вариация этих инвариантов **всегда тождественно равна нулю**. Повторим: приращение к любому 4-вектору всегда будет ортогонально этому 4-вектору. Это и есть причина постоянства релятивистского интеграла действия, т.е. условие **отсутствия экстремумов** у релятивистского интеграла.

Интересна физическая интерпретация постоянства релятивистского интеграла действия. Пределы интегрирования s_1 и s_2 релятивистского интеграла действия представляют собой две концентрических 4-сферы (Рис. 1), в которые «упираются» концы траектории частицы.

При варьировании траектории эти концы свободно скользят по указанным поверхностям. При этом форма кривой не меняется.

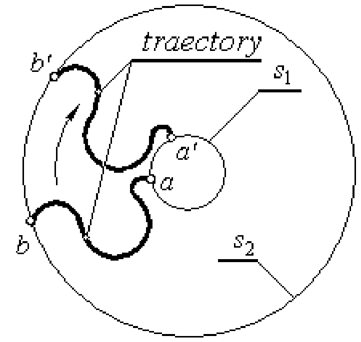

Рис. 1

Кривая «крутится» в 4-пространстве, но ее форма сохраняется неизменной. В классическом интеграле действия (в отличие от релятивистского) концы траектории жестко «зафиксированы» в неподвижных точках t_1 и t_2, а варьируется только форма траектории (читайте Фейнмана!).

Математический формализм Специальной теории относительности часто именуют «*теорией инвариантов*». Именно релятивистские инварианты должны быть слагаемыми релятивистской функции Лагранжа. Как известно, любой инвариант (истинный скаляр) сохраняет неизменным свое значение при повороте в 4-пространстве (при переходе из одной инерциальной системы в другую). Следовательно, вариация любого инварианта, образованного 4-вектором (фактически сводящаяся к переходу из одной инерциальной системы отсчета в другую), всегда *ортогональна* этому 4-вектору. Например, вариация квадрата 4-вектора скорости (инвариант) равна нулю.

$$\delta u_i^2 = 2u_i \delta u_i = \delta(-1) = 0$$

Таким образом, изменение релятивистского интеграла действия всегда равно нулю не в силу произвольности вариации, а в силу ортогональности 4-вариации уравнению движения. Это справедливо для *каждого* инварианта.

Чтобы подтвердить этот вывод, запишем из [3] конечное выражение, из которого получают формулу Лоренца.

$$\delta S = \int_{s_1}^{s_2} \left[-mc\frac{du_i}{ds} + e\left(\frac{dA_k}{dx_i} - \frac{dA_i}{dx_k} \right) \right] \delta x_i ds = \int_{s_1}^{s_2} \left[-mc\frac{du_i}{ds} + e\left(\frac{dA_k}{dx_i} - \frac{dA_i}{dx_k} \right) \right] u_i \delta s ds \quad (6.6)$$

Убедимся, что вариация интеграла равна нулю в силу ортогональности выражения в квадратных скобках по отношению к δx_i, а не в силу произвольности δx_i.

$$
\begin{aligned}
&a)\ -mc\frac{du_i}{ds}u_i=-mc\frac{d(u_i)^2}{2ds}=mc\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\right)=0\\
&b)\ e\left(\frac{dA_k}{dx_i}-\frac{dA_i}{dx_k}\right)u_iu_k=e\left(\frac{dA_k}{dx_i}u_iu_k-\frac{dA_i}{dx_k}u_iu_k\right)=e\left(\frac{dA_i}{dx_k}u_iu_k-\frac{dA_i}{dx_k}u_iu_k\right)=0
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

В выражение (6.7) входят скалярные слагаемые, и мы имеем право заменить индексы i на k, а k на i в первом слагаемом одновременно. Именно благодаря ***ортогональности*** мы получаем счетное множество уравнений движения, поскольку к любому уравнению движения мы можем добавить произвольный член, ортогональный к δx_i. Вариация интеграла действия от этой процедуры не изменится, и вариация интеграла действия будет всегда равна нулю.

Замечание. Рассмотренные выше выводы оказываются справедливыми и для интегралов действия, использующих плотность функции Лагранжа для получения уравнений полей.

$$S=\frac{1}{ic}\int\Lambda\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k};A_i;...\right)d\boldsymbol{\Omega} \tag{6.8}$$

где: Λ – плотность функции Лагранжа; $d\Omega$ – элементарный 4-объем ($dx\cdot dy\cdot dz\cdot icdt$).

Однако ситуация меняется, если представить интеграл действия (6.8) в следующей (классической) форме

$$S=\frac{1}{ic}\int\Lambda\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k};A_i;...\right)d\boldsymbol{\Omega}=\iiint\left(\int L\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k};A_i;...\right)dt\right)dxdydz=\int_{t_1}^{t_2}Ldt \tag{6.9}$$

где: $L=\iiint\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k};A_i;...\right)dxdydz$ - классическая функция Лагранжа.

Как мы писали выше, вариация любого инварианта, входящего ***в релятивистскую функцию Лагранжа***, всегда ***ортогональна*** к 4-вектору, образующему инвариант. Именно это является причиной появления «привидений» в уравнениях движения и неоднозначности уравнений. Еще раз мы упомянем о том, что говорить о релятивистском принципе наименьшего действия беспредметно. Релятивистский интеграл действия постоянен и не имеет экстремумов.

Как следствие, уравнения для электромагнитных и гравитационных полей, которые были получены с помощью релятивистского принципа наименьшего действия, не только *неоднозначны,* но и весьма сомнительны. «***Блестящий математический формализм***», которым всегда так гордились апологеты релятивистских теорий, на деле оказывается некорректным. Он напоминает «***блестящий мыльный пузырь».*** Сколько раз приходилось писать ([7], [8] и др.) и говорить об этом!

Из какого места вырастают глаза у физиков-теоретиков?

7.Заключение

Вариация интеграла действия равна нулю в двух случаях. Во-первых, когда интегрирование идет вдоль экстремали, определяемой уравнением движения Эйлера. В этом случае интеграл имеет экстремум. Во вторых, когда величина интеграла постоянна. Она не зависит от пути интегрирования, а определяется только пределами интегрирования. Первый случай реализован в классической механике Ньютона. Второй – в релятивистских теориях.

Используя релятивистский интеграл действия и релятивистский принцип наименьшего действия, мы получаем счетное множество уравнений движения, и нет критерия, который бы позволил определить, какое уравнение отвечает физическим явлениям.

Используя этот интеграл и этот принцип, мы не можем достоверно сформулировать законы сохранения для релятивистской механики. С помощью этого принципа невозможно получить единственные и надежные уравнения для электромагнитных и гравитационных полей.

Теории, опирающиеся на этот принцип, мягко говоря, сомнительны. Это релятивистская механика и электродинамика, Специальная и Общая теория относительности, теория ускорителей, теория элементарных частиц, различные разделы физики твердого тела и квантовых теорий, т. е. все то, к чему прикоснулся математический формализм релятивистов. Мы не описали проблемы с первыми интегралами (законы сохранения).

Учитывая гносеологические ошибки, внесенные Специальной теорией относительности А.Эйнштейна, мы можем сказать, что релятивистские теории представляют собой *псевдонаучную эклектику*. Грустно смотреть на всю эту наукообразную схоластику. Но выход есть. Пути преодоления релятивистского безобразия в физике существуют. Но пути эти не просты. Они нуждаются в специальном изложении.

Литература

1. Р.Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Том 6: Электродинамика. (Глава 19). Перевод с английского. Изд. 2-е. М.: Мир, 1977
2. В.А. Кулигин. Причинность и взаимодействие в физике. http://n-t.ru/tp/ns/pvf.htm, 2001.
3. В.А. Кулигин, М.В. Корнева, Г.А. Кулигина «Механические» основы уравнений Максвелла. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163788.htm, 2018.
4. Г. Голдштейн. Классическая механика. – М.: Наука, 1975.
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. – М: Физматгиз, 1961.
6. В.К. Пановски, М. Филлипс. Классическая электродинамика. – М: Мир, 1975.
7. V.A. Kuligin. The Principle of Least Action in Special Relativity Theory. Galilean Electrodynamics, vol. 12, Special Issues 2, 2001.
8. В.А. Кулигин. Интеграл действия релятивистской механики./ Проблемы пространства, времени, тяготения. С.-Петербург: Политехника, 1997.