Решение задачи уравнивания полигонометрии.

«Не следует смешивать то, что нам кажется невероятным и неестественным, с абсолютно невозможным.»

К.Ф.Гаусс

В определенных , и не шибко узких кругах , Гаусс известен как «король математиков» .В шибко узких кругах известно что математика даже в эпоху их королей не шибко то сильно баловала этих баловней судьбы, во всяком случае они не могли прокормиться за ее счет , что несомненно только стимулировало их творческий потенциал до уровня королевского , из числа королей которым они были не ровня , как тогда так и нынче. Кормился Гаусс по большей части за счет геодезии , то бишь картографии. Вряд ли кто усомнится в том что на и поприще геодезии Гаусс оставил мощный, и тем не менее полезный , след . Более всего он чтим всеми последующими поколениями геодезистов за кошмары уравнивания геодезических сетей методом наименьших квадратов , ставшем непреодолимой стеной на пути к заветному диплому у незадачливых студентов . Суть задачи уравнивания геодезических ходов такова.

Если вы хотя бы однажды видели карту то у вас был шанс увидеть что она рисуется в плоской системе координат , и некоторые сей шанс даже не упустили. Но чтобы что либо нарисовать в системе координат нужно знать хотя бы координаты нескольких точек рисунка , это опорные координаты точек в геодезии, к которым привязан весь остальной рисунок карты . Простейший способ определения опорных координат точек это производство набора измерений между выбранными точками поверхности , как правило он сводится к измерению длины между точками - L_{12} (точками *1,2* в данном случае), и измерению угла между точками . Угол можно измерить только между тремя точками , поэтому основой геодезической сети является как минимум три точки поверхности *– 1,2,3* **соответственно угол между ними есть -** Ψ_{123} **, такая элементарная ячейка сети есть треугольник .**

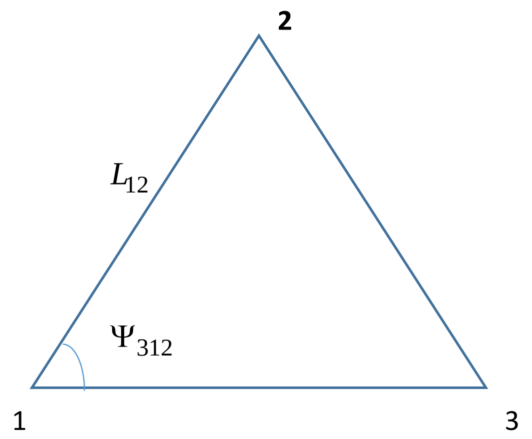

Рис.1

Если координаты точек 1 и 3 известны то этих двух измерений достаточно для определения координаты точки 2. Но геодезисты делают еще как минимум два измерения . Они измеряют углы на точках 2 и 3 . Ясно что сумма этих углов должна быть 180^0, ведь сумма углов треугольника в теории равна именно этому числу. Таким образом можно проконтролировать точность измерений углов .

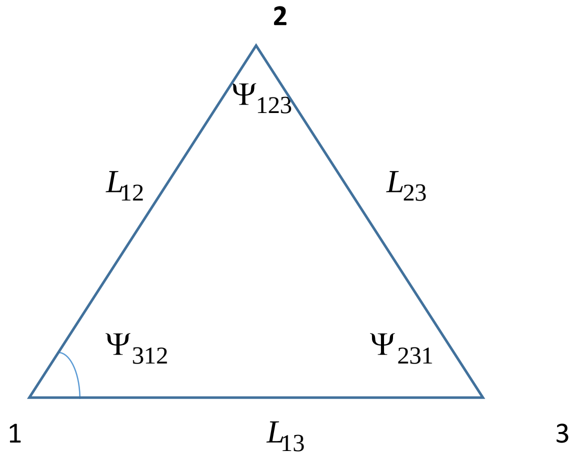

Рис.2

$$\Psi_{312}+\Psi_{123}+\Psi_{231}=180^0 \text{ ; (1)}$$

Этот ход является частным случаем n -угольника, называемого в геодезии замкнутым полигонометрическим ходом, или для пущей важности полигоном.

Патологических противников математики наверняка обрадует известие о том что на практике этот результат получить невозможно . Ввиду неизбежных ошибок при измерениях углов ,которые мы обозначим как - a_1, a_2, a_3, на практике получить равенство (1) невозможно . То есть на практике всегда имеем

$$\Psi_{312}+\Psi_{123}+\Psi_{231}=W\alpha \neq 180^0 \text{; (2)}$$

Равенство (1) можно получить только если ввести поправки в измерения углов , равные ошибкам их измерений посредством

$$(\Psi_{312}+a_1)+(\Psi_{123}+a_2)+(\Psi_{231}+a_3)=180^0 \text{; (3)}$$

Величина - $W\alpha$ есть численное выражение мерила точности измерения углов и названа угловой невязкой , чем она меньше тем измерения точнее . Конечно патологические противники математики могут поднять неистовый вой , дескать выводы математики никогда не совпадают с практикой ,но математика создана как раз для того чтобы иметь возможность компенсировать ошибки измерений , а для этого нужно знание теоретических величин , в частности суммы углов треугольника , математика как раз и дает это теоретическое значение , которое никогда невозможно получить как натурными измерениями так и философскими рассуждениями.

Для получения координаты любой точки , по результатам парных измерений - угла и длины , нужно сделать замечание . На практике удобнее пользоваться не значением измеренных углов , а значением так называемых дирекционных углов - Υ , введенных Гауссом из следующих соображений , которые зачастую в учебниках геодезии опущены . Нам известна сумма углов не только треугольника , но и четырехугольника , и даже произволного n - угольника в котором все углы являются внутренними . Но на практике встречаются геодезические сети с самопересекающимися сторонами , например восьмерка.

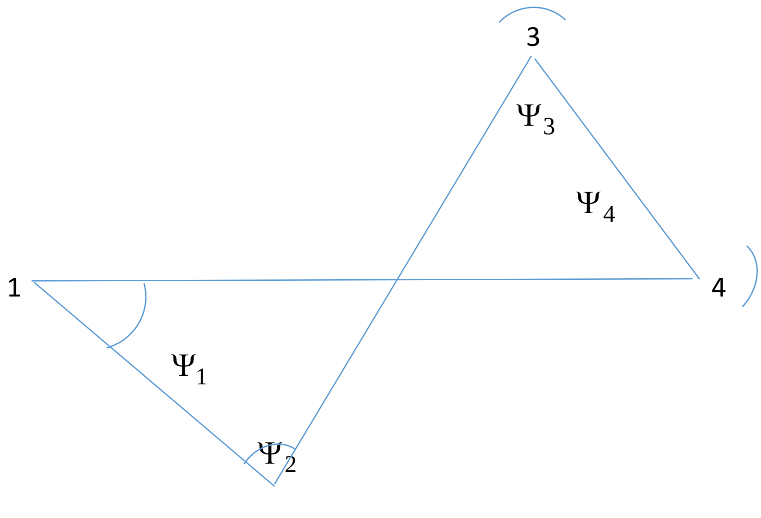

рис.3

Измерительный прибор для измерения углов устроен так что угол меряется по часовой стрелке . Измеряя углы по часовой стрелке на точках 1,2 мы получим внутренние углы , но уже на точках 3,4 углы становятся внешними . В данном случае имеем сумму внутренних и внешних углов , для такой суммы углов общая формула до сих пор неизвестна . Чтобы обойти это препятствие Гаусс и ввел дирекционные углы , которые отсчитываются от некоторого опорного направления , например 1-4, по часовой стрелке . Если в качестве опорного направления принять направление 1-4 - Υ_{41} то дирекционные углы для рис.3 определяются через измеренные согласно

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{12} &= \Upsilon_{41} + \Psi_1 \pm 180 \\
\Upsilon_{23} &= \Upsilon_{12} + \Psi_2 \pm 180 = \Upsilon_{41} + \Psi_1 + \Psi_2 \pm 180 \\
\Upsilon_{34} &= \Upsilon_{23} + \Psi_3 \pm 180 = \Upsilon_{41} + \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \pm 180 \\
\Upsilon_{41} &= \Upsilon_{34} + \Psi_4 \pm 180 = \Upsilon_{41} + \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 \pm 180
\end{aligned} \quad ;(4)$$

На практике конечно из-за ошибок измерения углов вычисленное значение - Υ_{41} дирекционного угла опорной стороны отлично от первоначально заданного Υ_{41}^0 , поэтому последнее равенство играет роль угловой невязки , ибо должно быть

$$\Upsilon_{41} - \Upsilon_{41}^0 = 0 ; (5)$$

На практике же имеем $\Upsilon_{41} - \Upsilon_{41}^{0} = W\alpha \neq 0$; (6)

Зная значение координаты точки 1 - X_1^0, Y_1^0 координаты остальных точек , в замкнутом полигоне, вычисляются по дирекционным углам и измеренным длинам по формулам

$$\begin{array}{ll} X_2 = X_1 + L_{12}\cos\Upsilon_{12}; & Y_2 = Y_1 + L_{12}\cos\Upsilon_{12}; \\ X_3 = X_2 + L_{23}\cos\Upsilon_{23}; & Y_3 = Y_2 + L_{23}\cos\Upsilon_{23}; \\ X_4 = X_3 + L_{34}\cos\Upsilon_{34}; & Y_4 = Y_3 + L_{34}\cos\Upsilon_{34}; \\ X_1 = X_4 + L_{41}\cos\Upsilon_{44}; & Y_1 = Y_4 + L_{41}\cos\Upsilon_{41}; \end{array} \quad ; (7)$$

То есть в теории мы ,совершив полный обход по контуру полигона, возвращаемся в исходную точку 1. Ясно что в теории должно быть что разница между заданными и вычисленными координатами точки -1 равна нулю , то есть

$$\begin{array}{l} X_1 - X_1^0 = 0 \\ Y_1 - Y_1^0 = 0 \end{array} \quad ; (8)$$

На практике же, ввиду неизбежных ошибок при измерении длин, имеем

$$\begin{array}{l} X_1 - X_1^0 = W_x \neq 0 \\ Y_1 - Y_1^0 = W_y \neq 0 \end{array} \quad ; (9)$$

Величины - W_x, W_y есть невязки соответствующих координат . Задачей уравнивания является нахождение таких поправок в измеренные величины – углы и длины , чтобы после их введения в измеренные величины , и были выполнены элементарные геометрические условия

$$\begin{array}{l} \Upsilon_{41} - \Upsilon_{41}^0 = 0 \\ X_1 - X_1^0 = 0 \quad ; (10) \\ Y_1 - Y_1^0 = 0 \end{array}$$

Имеем всего три условных уравнения , при этом число измерений всегда больше трех , грубо говоря число измерений равно числу точек умноженных на два. Таким образом , число неизвестных поправок всегда больше числа условных уравнений, и задача имеет бесконечное множество решений!? Это было известно еще задолго до Гаусса . Гаусс просто предложил из бесконечного числа решений найти такое чтобы сумма квадратов поправок была минимальной , исходя из того что на практике геодезист стремиться выполнить измерения максимально точно . Но это не дает гарантии того что ошибки измерений будут найдены точно , ведь у Гаусса они просто выбираются из бесконечного множества. Поэтому решение Гаусса нельзя признать математически строгим .

Исходя только из требований (10) задачу уравнивания полигонометрии, то есть геодезической сети в которой выполнены измерения углов и длин, решить невозможно. Эта задача является до сих пор неразрешимой, и надежда на ее решение давно потеряна даже среди королей математики. Но ведь если джентльмен не может выиграть по правилам то он меняет правила. Воспользуемся этим бандитским приемом и мы.

В целях упрощения изложения и наглядности рассмотрим задачу уравнивания для треугольника. Распространение методики ее решения на произвольную сеть полигонометрии затруднений вызвать не должно.

Итак, по условию требуется уравнять треугольник, в котором измерены все углы и длины.

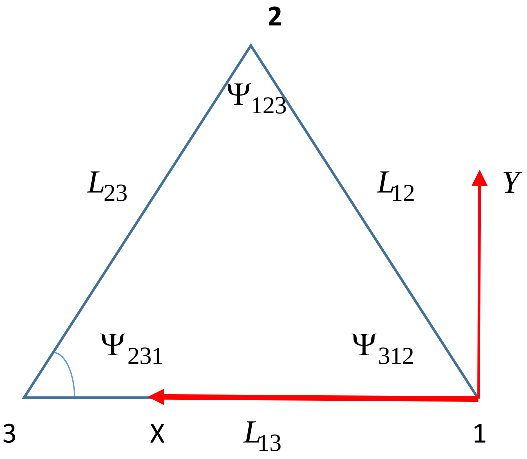

Рис.11

Примем что координаты точки 1 и значение дирекционного угла Υ_{31} равны нулю, что равносильно тому что начало координат находится в точке – 1 (в геодезии луч координаты X направлен вверх, поэтому спецы положили бы рисунок на бок стороны L_{12}), тогда

$$X_1 = 0; Y_1 = 0; \Upsilon_{31} = 0; \text{(11)}$$

После введения поправок - a_n в углы, и поправок - l_n в длины должно выполняться

$$\Upsilon_{31} = (\Psi_1 + a_1) + (\Psi_2 + a_2) + (\Psi_3 + a_3) \pm 180 = 0$$
$$X_1 = (L_{12} + l_2)\cos(\Psi_1 + a_1 \pm 180) + (L_{23} + l_3)\cos(\Psi_1 + \Psi_2 + a_1 + a_2 \pm 180) + (L_{31} + l_1)\cos(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + a_1 + a_2 + a_3 \pm 180) = 0$$
$$Y_1 = (L_{12} + l_2)\sin(\Psi_1 + a_1 \pm 180) + (L_{23} + l_3)\sin(\Psi_1 + \Psi_2 + a_1 + a_2 \pm 180) + (L_{31} + l_1)\sin(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + a_1 + a_2 + a_3 \pm 180) = 0$$

; (12)

Без поправок получим значения невязок.

$$\Upsilon_{31} = (\Psi_1) + (\Psi_2) + (\Psi_3) \pm 180 = W\alpha$$
$$X_1 = (L_{12})\cos(\Psi_1 \pm 180) + (L_{23})\cos(\Psi_1 + \Psi_2 \pm 180) + (L_{31})\cos(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \pm 180) = W_{X1} \text{ ; (13)}$$
$$Y_1 = (L_{12})\sin(\Psi_1 \pm 180) + (L_{23})\sin(\Psi_1 + \Psi_2 \pm 180) + (L_{31})\sin(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \pm 180) = W_{Y1}$$

Выше указывалось что найти точные значения ошибок измерений - a_n, l_n исходя из условий (12) и величин невязок (13) невозможно . Но ведь ничто не запрещает нам перенести начало координат в точку – 2 !

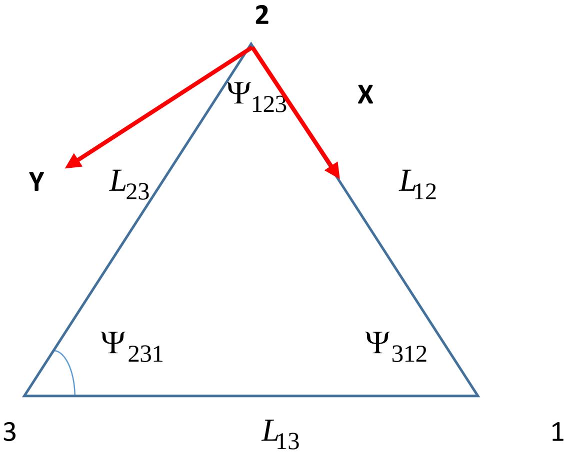

Рис.12

Для такого положения начала координат получим следующие значения невязок координат .

$$\begin{aligned} X_2 &= (L_{23})\cos(\Psi_2 \pm 180) + (L_{31})\cos(\Psi_2 + \Psi_3 \pm 180) + (L_{12})\cos(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \pm 180) = W_{X2} \\ Y_2 &= (L_{23})\sin(\Psi_2 \pm 180) + (L_{31})\sin(\Psi_2 + \Psi_3 \pm 180) + (L_{12})\sin(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \pm 180) = W_{Y2} \end{aligned} \quad ; (14)$$

Однако ничто не запрещает нам расположить начало координат и в точке – 3 , тогда получим следующие значения невязок координат

$$\begin{aligned} X_3 &= (L_{31})\cos(\Psi_3 \pm 180) + (L_{12})\cos(\Psi_3 + \Psi_1 \pm 180) + (L_{23})\cos(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \pm 180) = W_{X3} \\ Y_3 &= (L_{31})\sin(\Psi_3 \pm 180) + (L_{12})\sin(\Psi_3 + \Psi_1 \pm 180) + (L_{23})\sin(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \pm 180) = W_{Y3} \end{aligned} \quad ; (15)$$

Довольно неочевиден факт что значения невязок во всех трех случаях отличны друг от друга ,то бишь

$$\begin{aligned} W_{X1} \neq W_{X2} \neq W_{X3} \\ W_{Y1} \neq W_{Y2} \neq W_{Y3} \end{aligned} \quad ; (16)$$

Возникает вопрос . Нельзя ли анализируя величины координатных невязок для всех трех случаев получить значения поправок в измеренные величины? В данном случае мы имеем шесть условных уравнений (13),(14),(15) , но ведь и число поправок также равно – 6 ! Можно доказать что этот прием всегда дает столько условных уравнений сколько нужно получить поправок для замкнутого полигона. Таким образом система уравнений (13),(14),(15) является совместной , и если она имеет единственное решение то это решение будет точным значением ошибок измерений , так как ошибки измерений на практике также единственны!

Теперь дело остается лишь за техникой вычислений . Уравнения (13),(14),(15) нелинейны . Чтобы линеаризовать их воспользуемся тем что невязки на практике малы , а значит и малы поправки в измерения , поэтому разложим наши уравнения в ряд Тейлора с точностью до линейных членов .

Второе уравнение системы (13) с вводом поправок есть

$$X_1=\left(L_{12}+l_1\right)\cos\left(\Psi_1+a_1\pm180\right)+\left(L_{23}+l_2\right)\cos\left(\Psi_1+\Psi_2+a_1+a_2\pm180\right)+\left(L_{31}+l_3\right)\cos\left(\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3+a_1+a_2+a_3\pm180\right)=0$$

;(17)

Ряд Тейлора с точностью до линейных членов для (17) есть

$$a_1A_1^1+a_2A_2^1+a_2A_3^1+l_1\cos\left(\Upsilon_{12}\right)+l_2\cos\left(\Upsilon_{23}\right)+l_2\cos\left(\Upsilon_{31}\right)=-W_{X1}\text{ ; (18)}$$

Здесь

$$A_n^1=\frac{\partial X_1}{\partial a_n}$$

$$W_{X1}=\left(L_{12}\right)\cos\left(\Psi_1\pm180\right)+\left(L_{23}\right)\cos\left(\Psi_1+\Psi_2\pm180\right)+\left(L_{31}\right)\cos\left(\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3\pm180\right)\text{ ; (19)}$$

Уравнение (18) имеет тривиальное решение

$$\begin{gathered}l_1=-L_{12};l_2=-L_{23};l_3=-L_{31};\\ a_1=0;a_2=0;a_3=0;\end{gathered}\quad(20)$$

Действительно , подставив его в (17) получим – 0. Следовательно используя лишь координатные невязки решить задачу уравнивания невозможно . Нужно добавлять условие угловой невязки, но для условия угловой невязки места уже нет . Добавив условие угловой невязки мы получим 7 условных уравнений для 6 неизвестных , и задача вновь станет неразрешимой . Но ведь мы опять можем сыграть по своим , удобным для нас, правилам .

Дело в том что поправку в длину мы можем ввести двумя способами , а именно

$$L_n+l_n=\left(1+s_n\right)L_n\text{ ;(21)}$$

Но после этого мы получим уже семь неизвестных для поправок, и условию угловой невязки место будет найдено . Разлагая в ряд Тейлора все шесть исходных условных уравнения для координат(13),(14),(15) и записывая коэффициенты уравнений в матрицу в итоге получим квадратную матрицу

$$B=\begin{vmatrix}A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & \cos\left(\Upsilon_{12}\right) & \cos\left(\Upsilon_{23}\right) & \cos\left(\Upsilon_{31}\right)\\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & \sin\left(\Upsilon_{12}\right) & \sin\left(\Upsilon_{23}\right) & \sin\left(\Upsilon_{31}\right)\\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & \cos\left(\Upsilon_{23}\right) & \cos\left(\Upsilon_{31}\right) & \cos\left(\Upsilon_{12}\right)\\ A_1^4 & A_2^4 & A_3^4 & \sin\left(\Upsilon_{23}\right) & \sin\left(\Upsilon_{31}\right) & \sin\left(\Upsilon_{12}\right)\\ A_1^5 & A_2^5 & A_3^5 & \cos\left(\Upsilon_{31}\right) & \cos\left(\Upsilon_{12}\right) & \cos\left(\Upsilon_{23}\right)\\ A_1^6 & A_2^6 & A_3^6 & \sin\left(\Upsilon_{31}\right) & \sin\left(\Upsilon_{12}\right) & \sin\left(\Upsilon_{23}\right)\end{vmatrix}\text{ ; (22)}$$

Определитель этой матрицы равен нулю , следовательно система условных уравнений в исходном виде единственного решения не имеет. Однако заменим в последнем уравнении значение поправки в последнюю длину с l_3 на s_3

$$Y_3=(1+s_3)L_{31}\sin(\Psi_3\pm180)+(L_{12}+l_1)\sin(\Psi_3+\Psi_1\pm180)+(L_{23}+l_2)\sin(\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3\pm180)=W_{Y3}\text{;(23)}$$

Тогда матрица коэффициентов (22) примет вид

$$B=\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & \cos(\Upsilon_{12}) & \cos(\Upsilon_{23}) & \cos(\Upsilon_{31}) & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & \sin(\Upsilon_{12}) & \sin(\Upsilon_{23}) & \sin(\Upsilon_{31}) & 0 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & \cos(\Upsilon_{23}) & \cos(\Upsilon_{31}) & \cos(\Upsilon_{12}) & 0 \\ A_1^4 & A_2^4 & A_3^4 & \sin(\Upsilon_{23}) & \sin(\Upsilon_{31}) & \sin(\Upsilon_{12}) & 0 \\ A_1^5 & A_2^5 & A_3^5 & \cos(\Upsilon_{31}) & \cos(\Upsilon_{12}) & \cos(\Upsilon_{23}) & 0 \\ A_1^6 & A_2^6 & A_3^6 & \sin(\Upsilon_{31}) & \sin(\Upsilon_{12}) & 0 & \mathrm{L}_{23}\sin(\Upsilon_{23}) \end{vmatrix}\text{;(23)}$$

Вот теперь можно ввести 7 условие угловой невязки так как матрица (23) имеет 7 столбцов . Коэффициенты условного уравнения для угловой невязки очевидно все равны 1 , поэтому пишем

$$B=\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & \cos(\Upsilon_{12}) & \cos(\Upsilon_{23}) & \cos(\Upsilon_{31}) & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & \sin(\Upsilon_{12}) & \sin(\Upsilon_{23}) & \sin(\Upsilon_{31}) & 0 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & \cos(\Upsilon_{23}) & \cos(\Upsilon_{31}) & \cos(\Upsilon_{12}) & 0 \\ A_1^4 & A_2^4 & A_3^4 & \sin(\Upsilon_{23}) & \sin(\Upsilon_{31}) & \sin(\Upsilon_{12}) & 0 \\ A_1^5 & A_2^5 & A_3^5 & \cos(\Upsilon_{31}) & \cos(\Upsilon_{12}) & \cos(\Upsilon_{23}) & 0 \\ A_1^6 & A_2^6 & A_3^6 & \sin(\Upsilon_{31}) & \sin(\Upsilon_{12}) & 0 & \mathrm{L}_{23}\sin(\Upsilon_{23}) \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\text{; (24)}$$

Определитель этой матрицы отличен от нуля , и следовательно задача уравнивания уже имеет единственное решение , но матрицу (24) нельзя признать удовлетворительной , ведь мы введя поправку - s_3 фактически ввели и условие $L_n+l_n-(1+s_n)L_n=0$, это условие можно добавить в условие угловой невязки , ведь добавление к ней нуля ее величину не изменит, то есть допустимо условное уравнение вида

$$a_1+a_2+a_3+(L_{23}+l_3)\sin(\Upsilon_{23})-(1+s_3)L_{23}\sin(\Upsilon_{23})=W\alpha\ \text{;(25)}$$

В матричном представлении это дополнительное условное уравнение запишется в виде последней строчки

$$B=\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & \cos(\Upsilon_{12}) & \cos(\Upsilon_{23}) & \cos(\Upsilon_{31}) & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & \sin(\Upsilon_{12}) & \sin(\Upsilon_{23}) & \sin(\Upsilon_{31}) & 0 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & \cos(\Upsilon_{23}) & \cos(\Upsilon_{31}) & \cos(\Upsilon_{12}) & 0 \\ A_1^4 & A_2^4 & A_3^4 & \sin(\Upsilon_{23}) & \sin(\Upsilon_{31}) & \sin(\Upsilon_{12}) & 0 \\ A_1^5 & A_2^5 & A_3^5 & \cos(\Upsilon_{31}) & \cos(\Upsilon_{12}) & \cos(\Upsilon_{23}) & 0 \\ A_1^6 & A_2^6 & A_3^6 & \sin(\Upsilon_{31}) & \sin(\Upsilon_{12}) & 0 & \mathrm{L}_{23}\sin(\Upsilon_{23}) \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\mathrm{L}_{23} \end{vmatrix}\text{;(26)}$$

Теперь мы учли все условия , как геометрические , так и математические, при этом определитель матрицы (26) также отличен от нуля и задача имеет единственное решение . Чтобы его найти нужно ввести вектор невязок равный

$$C = \left| W_{X1}, W_{Y1,} W_{X2}, W_{Y2,} W_{X3}, W_{Y3,} W\alpha \right| \text{ ; (27)}$$

Умножив обратную к (26) матрицу на вектор невязок получим значения поправок в измеренные величины - D

$$D = \left| a_1, a_2, a_3, l_1, l_2, l_3, s_3 \right| = B^{-1}C \text{ ; (28)}$$

Значение - s_3 здесь в общем то избыточно , но тем не менее может быть использовано для контроля вычислений , ведь должно получиться $L_{23} + l_3 - (1+s_3)L_{23} = 0$. Теперь примите поздравления господа , мы решили задачу об которую обломали зубы зубры мировой математики.

Остается еще вопрос , чем отличилась длина L_{23} что заслужила право на дополнительную поправку s_3? Да ничем не отличилась. Дополнительные поправки вида $L_n + l_n - (1+s_n)L_n = 0$ можно вести во все длины. Просто при этом размерность матрицы увеличится на число этих поправок , в данном случае на три. При этом для условия угловой невязки в этом случае можно написать три уравнения вида

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 + (L_{12} + l_1)\sin(\Upsilon_{12}) - (1+s_1)L_{12}\sin(\Upsilon_{12}) = W\alpha \\ &a_1 + a_2 + a_3 + (L_{23} + l_2)\sin(\Upsilon_{23}) - (1+s_2)L_{23}\sin(\Upsilon_{23}) = W\alpha \text{ ;(29)} \\ &a_1 + a_2 + a_3 + (L_{31} + l_3)\sin(\Upsilon_{31}) - (1+s_3)L_{31}\sin(\Upsilon_{31}) = W\alpha \end{aligned}$$

Помня что

$$\begin{aligned} &(L_{12} + l_1)\sin(\Upsilon_{12}) - (1+s_1)L_{12}\sin(\Upsilon_{12}) = (L_{12} + l_1) - (1+s_1)L_{12} = 0 \\ &(L_{23} + l_2)\sin(\Upsilon_{23}) - (1+s_2)L_{23}\sin(\Upsilon_{23}) = (L_{23} + l_2) - (1+s_2)L_{23} = 0 \text{ ; (30)} \\ &(L_{31} + l_3)\sin(\Upsilon_{31}) - (1+s_3)L_{31}\sin(\Upsilon_{31}) = (L_{31} + l_3) - (1+s_3)L_{31} = 0 \end{aligned}$$

При этом поправки в длины удобно разделить на две части , так как число условных уравнений координат всегда четное . Например в половину условных уравнений координат ввести поправки длин - l_n ,а в другую половину поправки - s_n ,в этом случае система уравнений примет следующий матричный вид

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & \cos(\Upsilon_{12}^1) & \cos(\Upsilon_{23}^1) & \cos(\Upsilon_{31}^1) & 0 & 0 & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & \sin(\Upsilon_{12}^1) & \sin(\Upsilon_{23}^1) & \sin(\Upsilon_{31}^1) & 0 & 0 & 0 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & \cos(\Upsilon_{12}^2) & \cos(\Upsilon_{23}^2) & \cos(\Upsilon_{31}^2) & 0 & 0 & 0 \\ A_1^4 & A_2^4 & A_3^4 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L}_{12}\sin(\Upsilon_{12}^2) & \mathrm{L}_{23}\sin(\Upsilon_{12}^2) & \mathrm{L}_{31}\sin(\Upsilon_{12}^2) \\ A_1^5 & A_2^5 & A_3^5 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L}_{12}\cos(\Upsilon_{12}^3) & \mathrm{L}_{23}\cos(\Upsilon_{12}^3) & \mathrm{L}_{31}\cos(\Upsilon_{12}^3) \\ A_1^6 & A_2^6 & A_3^6 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L}_{12}\sin(\Upsilon_{12}^3) & \mathrm{L}_{23}\sin(\Upsilon_{12}^3) & \mathrm{L}_{31}\sin(\Upsilon_{12}^3) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\mathrm{L}_{12} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\mathrm{L}_{23} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\mathrm{L}_{31} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -W_{X1} \\ -W_{Y1} \\ -W_{X2} \\ -W_{Y2} \\ -W_{X3} \\ -W_{Y3} \\ -W_a \\ -W_a \\ -W_a \end{vmatrix} \text{ ;(31)}$$

Определитель этой матрицы также отличен от нуля и потому решение единственно , а так как набор ошибок - $a_1 ... s_3$ также единственный то и величины поправок , получаемые при решении системы с матрицей (31) , наиболее близки к ошибкам измерений , поэтому можно утверждать что поправки получаемые по описанной методике наиболее точны среди остальных известных методов уравнивания .Система уравнений с коэффициентами из матрицы (31) математически наиболее строгая , но и ее решение наиболее трудоемко . На практике видимо нужен компромисс между допустимой точностью и трудоемкостью решения . Точность здесь не последнее дело , матрица (31) разреженная , то бишь имеет много нулей. При решении систем уравнений с разреженными матрицами встает вопрос о максимальной разрядности ЭВМ , так как в наше время только крайне честно обделенный будет решать все вручную . Проблема в том что ЭВМ отбрасывает все разряды выше разрядности самой ЭВМ , при этом возникают неконтролируемые ошибки округлений ,которые нарастают экспоненциально , более того вместо нулей ЭВМ зачастую впихивает минимально возможное для нее число. При этом сумма ошибок округлений может быть сопоставима с величинами решения , и итоговое решение может быть грубо искажено . Однако все это относится к чисто техническим проблемам и они могут быть устранены чисто технически , главное что теперь известен алгоритм точного решения задачи уравнивания полигонометрии. Распространение метода на случай произвольного числа точек тривиально , ввиду чего здесь не рассматривается

Сметанников А.И. 22.01.2018