Хлебопрос Борис .

Дифференциальные уравнения с обратной функцией .

Производная обратной функции $y = f(x)$, $x = h(y)$, $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$, $x_y' = \frac{1}{y_x'}$, $h'(y) = \frac{1}{f'(y)}$, $y = \arcsin x$, $x = \sin y$, $x_y' = \cos y$, $y_x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Пример . $f'(x) = f^{-1}(x)$. Решение данного уравнения найдем в виде $y = f(x) = ax^n$, тогда $h(y) = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $h(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $f'(x) = anx^{n-1}$. Подставим эти выражения в данное уравнение $anx^{n-1} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$,

отсюда $x^{n-\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a}\right)^{1+\frac{1}{n}}$, поскольку $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a}\right)^{1+\frac{1}{n}} =$ constant , тогда $x^{n-\frac{1}{n}-1} = 1$, $n - \frac{1}{n} - 1 = 0$, $\bar{n} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, откуда $\frac{1}{\bar{n}}\left(\frac{1}{a}\right)^{1+\frac{1}{\bar{n}}} = 1$, это дает $a = \bar{n}^{-\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}}$ Поскольку $1 + \frac{1}{\bar{n}} = \bar{n}$, значит $a = \bar{n}^{-\frac{1}{\bar{n}}}$, найдем $f(x) = x^{\bar{n}} \bar{n}^{-\frac{1}{\bar{n}}}$.

Поскольку $x^{n-\frac{1}{n}-1} = 1$, имеем $n = nx^{n-\frac{1}{n}-1}$, значит решением уравнения $f'(x) = f^{-1}(x)\, nx^{n-\frac{1}{n}-1}$ является функция $f(x) = x^n$. Аналогично $n - \frac{1}{n} - 1 = 0$, то есть $n^2 - n = 1$, решение уравнения $f'(x) = \left(f^{-1}(x)\right)^{n(n-1)} n$ функция $f(x) = x^n$.

Пример . $f''(x) = f^{-1}(x)$. Решение данного уравнения найдем в виде $y = f(x) = ax^n$, тогда $h(y) = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $h(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $f'(x) = anx^{n-1}$, $f''(x) = an(n-1)x^{n-2}$. Подставим эти выражения в уравнение $an(n-1)x^{n-2} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$.

откуда $mx^{n-\frac{1}{n}-2} = \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{1}{a}\right)^{1+\frac{1}{n}}$, пототому что $\frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{1}{a}\right)^{1+\frac{1}{n}} =$ constant , тогда $x^{n-\frac{1}{n}-2} = 1$, $n - \frac{1}{n} - 2 = 0$, $\bar{n} = 1 \pm \sqrt{2}$, значит $\frac{1}{\bar{n}(\bar{n}-1)}\left(\frac{1}{a}\right)^{1+\frac{1}{\bar{n}}} = 1$, это дает $a = \left(\bar{n}(\bar{n}-1)\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{\bar{n}}}}$, потому что $1 + \frac{1}{\bar{n}} = \bar{n} - 1$, найдем $a = \left(\bar{n}(\bar{n}-1)\right)^{\frac{1}{1-\bar{n}}}$,

решение $f(x) = x^{\bar{n}}\left(\bar{n}(\bar{n}-1)\right)^{\frac{1}{1-\bar{n}}}$.

Аналогично можно решить уравнение $f^{(j)}(x) = f^{-1}(x)$. Решение данного уравнения найдем в виде $y = f(x) = ax^n$, тогда $h(y) = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $h(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $f'(x) = anx^{n-1}$, $f''(x) = an(n-1)x^{n-2}$

$f^{(j)}(x) = an(n-1)\,..\,(n-(j-2))(n-(j-1))x^{n-j}$. Подставим эти выражения в уравнение $an(n-1)\,..\,(n-(j-2))(n-(j-1))x^{n-j} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, тогда $x^{n-\frac{1}{n}-j} = \frac{1}{n(n-1)\,..\,(n-(j-2))(n-(j-1))}\left(\frac{1}{a}\right)^{1+\frac{1}{n}}$,

поскольку $\frac{1}{n(n-1)\,..\,(n-(j-2))(n-(j-1))}\left(\frac{1}{a}\right)^{1+\frac{1}{n}} =$ constant , тогда $x^{n-\frac{1}{n}-j} = 1$, $n - \frac{1}{n} - j = 0$, $\bar{n} = \frac{j \pm \sqrt{j^2+4}}{2}$, значит $\frac{1}{\bar{n}(\bar{n}-1)\,..\,(\bar{n}-(j-2))(\bar{n}-(j-1))}\left(\frac{1}{a}\right)^{1+\frac{1}{\bar{n}}} = 1$, это дает $a = \left(\bar{n}(\bar{n}-1)\,..\,(\bar{n}-(j-2))(\bar{n}-(j-1))\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{\bar{n}}}}$,

найдем $1 + \frac{1}{\bar{n}} = \bar{n} + 1 - j$, Поэтому $a = \left(\bar{n}(\bar{n}-1)\,..\,(\bar{n}-(j-2))(\bar{n}-(j-1))\right)^{\frac{1}{j-1-\bar{n}}}$. $j^2 < j^2 + 4 < (j+1)^2$, если $j \geq 2$, то имеем $\sqrt{j^2+4}$ не целое число .

Пример . $f'(x)=\left(f^{-1}(x)\right)^{r}$. Решение данного уравнения найдем в виде $y=f(x)=ax^{n}$, then $h(y)=\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $h(x)=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $f^{-1}(x)=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $f'(x)=anx^{n-1}$. Подставим эти выражения в уравнение $anx^{n-1}=\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{r}{n}}$,

откуда $x^{n-\frac{r}{n}-1}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a}\right)^{r\frac{1}{n}+1}$, поскольку $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a}\right)^{r\frac{1}{n}+1}$ = constant , тогда $x^{n-\frac{r}{n}-1}=1$, $n-\frac{r}{n}-1=0$, $\overline{n}=\frac{1\pm\sqrt{1+4r}}{2}$, отсюда $\frac{1}{\overline{n}}\left(\frac{1}{a}\right)^{r\frac{1}{\overline{n}}+1}=1$, это дает $a=\overline{n}^{-\frac{\overline{n}}{\overline{n}+r}}$, Потому что $1+\frac{r}{\overline{n}}=\overline{n}$, то $a=\overline{n}^{-\frac{1}{\overline{n}}}$, отсюда $f(x)=x^{\overline{n}}\overline{n}^{-\frac{1}{\overline{n}}}$.

Пример . $f'(x)=(1-r)\left(f^{-1}(x)\right)^{r^2-r}$. Решение данного уравнения функция $f(x)=\frac{1}{x^{r-1}}$. проверим это $f'(x)=(1-r)x^{-r}$, $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{1-r}}$, $(1-r)\left(f^{-1}(x)\right)^{r^2-r}=(1-r)\left(x^{\frac{1}{1-r}}\right)^{r^2-r}=(1-r)x^{-r}$. Для $r=2$ имеем $f(x)=\frac{1}{x}$.

Пример . Решение уравнения $f'(x)=\frac{1}{\ln\left(f^{-1}(x)\right)}$ это функция $f(x)=\ln x$.

Пример . Решение уравнения $f'(x)=e^{e^{f^{-1}(x)}}$ это функция $f(x)=e^{x}$.

Пример . $f'(x)=\frac{f^{-1}(x)}{\left(f^{-1}(x)+1\right)x}$. Решение данного уравнения это функция $f(x)=LambertW(xc)$, поскольку функция $LambertW(x)$ это обратная функция для $u(x)=xe^{x}$, то есть $u^{-1}(x)=W(x)$, $W\left(xe^{x}\right)=x$, $W(x)e^{W(x)}=x$,

производная равна $W'(x)=\frac{W(x)}{\left(W(x)+1\right)x}$

Существует ли другие решения таких уравнений ?

Существует ли решение уравнений $e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}=f^{-1}(x)$, $\frac{xf'(x)}{f(x)}=f^{-1}(x)$?

Существует ли решение уравнений $f'(x)=f\left(f(x)\right)$, $f''(x)=f\left(f(x)\right)$?