Алгебраическое решение теоремы Ферма.

(математика, теория чисел)

Хусид Михаил Абрамович
пенсионер (инженер электросвязи)
Германия, г.Вецлар
e-mail: michusid@meta.ua

$X^n + Y^n = Z^n$ *(01)*

n- простое число, n>2; X,Y,Z -целые числа.

Решениями чего могут быть X,Y, Z — взаимно простые числа.

1.Разложение (01) на множители.

Если n - нечётное, то (01) разложится на множители:

$X^n + Y^n = (X + Y)(X^{n-1} - X^{n-2}Y + \ldots - XY^{n-2} + Y^{n-1})$ *(02)*

где во второй скобке геометрическая прогрессия

с первым членом $a_1 = X^{n-1}$ *,и множителем* $q = -\frac{Y}{X}$

Сумма членов которой $S = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$

$Z^n = Z_{11} Z_{22}$ *(03)*

где

$Z_{11} = X + Y$ *(04)*

$Z_{22} = X^{n-1} - X^{n-2}Y + \ldots - X Y^{n-1} + Y^{n-1}$ *(05)*

2.Эквивалентное представление Z_{22} **.**

Если суммировать равноудалённые члены от сред-

него члена прогрессии Z_{22} *попарно имеем:*

для 3-ей степени

$$Z_{22}=(X+Y)^2-3XY \qquad (06)$$

для 5- ой степени

$$Z_{22}=\frac{X^5+Y^5}{X+Y}=X^4-X^3Y+X^2Y^2-XY^3+Y^4 \qquad (07)$$

$$X^4+Y^4=(X+Y)^4-4XY(X+Y)^2+2X^2Y^2 \qquad (08)$$

$$-XY^3-X^3Y=-XY(X^2+Y^2)=-XY(X+Y)^2+2X^2Y^2 \qquad (09)$$

$$Z_{225}=(X+Y)^4-5(X+Y)^2+5X^2Y^2 \qquad `(10)$$

для 7-ой степени

$$Z_{227}=(X+Y)^6-7XY(X+Y)^4+14X^2Y^2(X+Y)^2-7X^3Y^3 \qquad (11)$$

$$Z_{22N}=\frac{X^n+Y^n}{X+Y}=$$

$$=(X+Y)^{n-1}-K_{n-3}XY(X+Y)^{n-3}+\ldots\mp K_2X^{\frac{n-3}{2}}Y^{\frac{n-3}{2}}(X+Y)^2\pm nX^{\frac{n-1}{2}}Y^{\frac{n-1}{2}} \qquad (12)$$

$$Z_{22N}=(X+Y)^{n-1}-K_{n-3}XY(X+Y)^{n-3}+\ldots\mp K_2X^{\frac{n-3}{2}}Y^{\frac{n-3}{2}}(X+Y)^2\pm nX^{\frac{n-1}{2}}Y^{\frac{n-1}{2}} \qquad (*)$$

где $K_{n-3}\ldots K_2$ *соответствующие коэффициенты при* $(XY)^{\cdots}(X+Y)^{\cdots}$

эквивалентное представление Z_{22N} *алгебраической суммой чётных степеней*

X+Y и остаточным членом $\pm n\,X^{\frac{n-1}{2}}Y^{\frac{n-1}{2}}$.

Докажем выше указанное.

Лемма1: Пусть для n- нечётного числа и для предыдущего n-2 справедливо эквивалентное представление(*),то и для последующего n+2 оно (*) действительно.

$\frac{X^{n_1}+Y^{n_1}}{X+Y}$ *умножим на* $(X+Y)^2-2\ X\ Y$

$$X^{n+2}+Y^{n+2}=(X+Y)[Z_{22N}(X+Y)^2-2XYZ_{22N}-X^2\ Y^2\ (X^{n-2}+Y^{n-2})] \qquad (14)$$

$$(X+Y)^{n-1}-K_{n-3}XY(X+Y)^{n-3}+...\mp K_2\ X^{\frac{n-3}{2}}Y^{\frac{n-3}{2}}(X+Y)^2\pm nX^{\frac{n-1}{2}}Y^{\frac{n-1}{2}} \quad *$$

$$*\ (X+Y)^2=(X+Y)^{n+1}-K_{n-1(01)}XY(X+Y)^{n-1}+...\mp K_{4(01)}X^{\frac{n-3}{2}}Y^{\frac{n-3}{2}}\pm nX^{\frac{n-1}{2}}Y^{\frac{n-1}{2}}(X+Y)^2 \qquad (15)$$

$$-2\ XY\ [\ (X+Y)^{n-1}-K_{n-3}XY(X+Y)^{n-3}+...\mp K_2\ X^{\frac{n-3}{2}}Y^{\frac{n-3}{2}}(X+Y)^2\pm nX^{\frac{n-1}{2}}Y^{\frac{n-1}{2}}\ ]=$$

$$=$$

$$-2\ XY(X+Y)^{n-1}-K_{n-3(02)}2\ X^2\ Y^2(X+Y)^{n-3}+...\mp K_{2(02)}2\ X^{\frac{n-1}{2}}Y^{\frac{n-1}{2}}(X+Y)^2\pm 2\ X^{\frac{n+1}{2}}Y^{\frac{n+1}{2}}\ n$$

(16)

$$-X^2\ Y^2(X+Y)^{n-3}+K_{n-3(03)}X^3\ Y^3(X+Y)^{n-5}+...\pm K_{2(03)}X^{\frac{n-1}{2}}Y^{\frac{n-1}{2}}(X+Y)^2\mp(n-2)X^{\frac{n+1}{2}}Y^{\frac{n+1}{2}}$$

(17)

где $K_{...(01)}$ *- соответствующие коэффициенты при умножении на* $(X+Y)^2$,

$K_{...(02)}$ *- соответствующие коэффициенты при умножении на* $-2XY$,

$K_{...(03)}$ *- соответствующие коэффициенты при умножении на* $-X^2\ Y^2$

После сложения подобных членов вновь получаем (*)

Теорема.

Эквивалентное представление (*) действительно для любого простого n.

Согласно лемме , если два предыдущих представления(*)действительны, третьей и пятой степени, то оно справедливо для 7 степени. Теперь взяв предыдущими 5 и 7 степени имеем действительность её для 9 степени и.т.д, что означает все нечётные степени описываются выше приведённой формулой.

И так как в него входят простые n ,то она справедлива для простого n.

Представим (01) как:

$$(X+Y)^n - Z^n = nX^{n-1}\,Y + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2}\,Y^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}Y^{n-2}\,X^2 + nX\,Y^{n-1}$$

$$= nX^{n-1}\,Y + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2}\,Y^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}Y^{n-2}\,X^2 + nX\,Y^{n-1} \qquad (18)$$

Сократив, на X+Y имеем:

$$Z_{22} = (X+Y)^{n-1} - nXY(\ldots) \qquad (19)$$

И общий множитель n выделим отдельно:

$$Z_{22\mathrm{n}} = (X+Y)^{n-1} - nk_{n-3}X\,Y(X+Y)^{n-3} + \ldots \pm nk_2\,X^{\frac{n-3}{2}}\,Y^{\frac{n-3}{2}}(X+Y)^2 \mp n\,X^{\frac{n-1}{2}}\,Y^{\frac{n-1}{2}} \qquad (20)$$

Покажем ,что X+Y -Z содержит множитель n:

$$(X+Y-Z)^n = (X+Y)^n - n(X+Y)^{n-1}Z + \ldots + n(X+Y)Z^{n-1} - Z^n \qquad (21^*)$$

что (18) и(21) подтверждает.*

3.*Анализ равенства (20)*

Из уравнения (20) $Z_{11} = X+Y$ *и* Z_{22} *не могут иметь общего множителя за исключением n . Из чего следуют следующие равенства в отсутствии n:*

$$X+Y = Z_1^n\,, \qquad Z-X = Y_1^n\,, \qquad Z-Y = X_1^n \qquad (21)$$

$$Z_{11} = Z_1^n\,,\ Z_{22} = Z_2^n\,,\ X_{11} = X_1^n\,,\ X_{22} = X_2^n\,,\ Y_{11} = Y_1^n\,,\ Y_{22} = Y_2^n \qquad (22)$$

$$X+Y-Z = n\,X_1\,Y_1\,Z_1\,K_o \qquad (23)$$

согласно (21)*

$$Z_1^n - Z = n\,X_1\,Y_1\,Z_1\,K_o \qquad X - X_1^n = n\,X_1\,Y_1\,Z_1\,K_o\,, \qquad Y - Y_1^n = n\,X_1\,Y_1\,Z_1\,K_o \qquad (24)$$

где K_o *-целое число, взаимно простое к остальным указанным сомножителям.*

$$X-Y=X_1^n-Y_1^n \tag{25}$$

$$Z_1^n=X_1^n+Y_1^n+2\ n\ X_1\ Y_1\ Z_1\ K_o \tag{26}$$

Если сумма или разность двух взаимно простых чисел имеет множитель n, то сумма и разность n- степени этих чисел делится как минимум на n^2 *,*

что,очевидно, из (20),(04).

В случае ,если в разложении Z, X, Y не имеет простой множитель n.

$$Z_{22}=nZ_2^n\ ,\quad X_{22}=nX_2^n\ ,\quad Y_{22}=nY_2^n \tag{27}$$

в случае ,если в разложении Z , X, Y присутствует простой множитель n.

и согласно формуле (20) Z_2 *не может иметь в наличии n, в противном случае это приведёт к наличию его у X либо Y,и наоборот, что не допустимо.*

$Z_2\ , X_2\ , Y_2$ - ***не содержит множитель n.***

В этой связи , если Z содержит множитель n ,то формула(26) имеет вид, так как сумма $X_1^n+Y_1^n$ *содержит множитель* n^m *,где натуральное число* $m\geq 2$ *и*

$Z_2\ , X_2\ , Y_2$ - *не содержит множитель n.*

$$n^{nm-1}Z_1^n=X_1^n+Y_1^n+2\mathrm{n}^m\ X_1\ Y_1\ Z_1\ K_o \tag{28}$$

Для решения (28) в целых числах степень n в $X_1^n+Y_1^n$ *,должна быть равна степени n в последнем одночлене то есть минимально* n^2 *.*

аналогично:

$$n^{nm-1}X_1^n=Z_1^n-Y_1^n-2\mathrm{n}^m\ X_1\ Y_1\ Z_1\ K_o \tag{29}$$

$$n^{nm-1}Y_1^n=Z_1^n-X_1^n-2\mathrm{n}^m\ X_1\ Y_1\ Z_1\ K_o \tag{30}$$

И для случая (28):

$$n^{nm-1} Z_1^n - Z = n^m \; X_1 \; Y_1 \; Z_1 \; K_o \qquad (31)$$

И для случая (29):

$$X - n^{nm-1} X_1^n = n^m \; X_1 \; Y_1 \; Z_1 \; K_o \qquad (32)$$

И для случая (30):

$$Y - n^{nm-1} Y_1^n = n^m \; X_1 \; Y_1 \; Z_1 \; K_o \qquad (33)$$

Из чего следует:

$$Z_2 = n^{nm-m} Z_1^{n-1} - X_1 \; Y_1 \; K_o \qquad (34)$$

$$X_2 = n^{nm-m} X_1^{n-1} + Y_1 \; Z_1 \; K_o \qquad (35)$$

$$Y_2 = n^{nm-m} Y_1^{n-1} + X_1 \; Z_1 \; K_o \qquad (36)$$

4. Если Z или X или Y делится на n решения нет

Согласно (34):

$$Z_2^n = n^{n(nm-m)} Z_1^{n(n-1)} - nn^{(n-1)(nm-m)} \; Z_1^{(n-1)^2} X_1 \; Y_1 \; K_o + \ldots +$$

$$+ \; nn^{(nm-m)} \; Z_1^{(n-1)} (X_1 \; Y_1 \; K_o)^{n-1} - (X_1 \; Y_1 \; K_o)^n \qquad (37)$$

Последний одночлен согласно (28):

$$n^{nm-1} Z_1^n = X_1^n + Y_1^n + 2\mathrm{n}^m \; X_1 \; Y_1 \; Z_1 \; K_o$$

$$(X_1 \; Y_1 \; K_o)^n = \frac{(2 \; n^{nm-1} \; Z_1^n - 2\mathrm{n}^m \; Z_1 \; Z_2)^n}{2^n \; n^{nm} \; Z_1^n} \qquad (38)$$

Согласно (20) и (27):

$$Z_2^n = n^{(nm-1)(n-1)-1} \; Z_1^{n(n-1)} - k_{n-3} XY (X+Y)^{n-3} + \ldots \pm k_2 \; X^{\frac{n-3}{2}} \; Y^{\frac{n-3}{2}} (X+Y)^2 \mp X^{\frac{n-1}{2}} \; Y^{\frac{n-1}{2}} \qquad (39)$$

Подставим (38) в (37) и приведём подобные:

$$n^{n(nm-m)+mn} Z_1^{n(n-1)+n} - n^{(n-1)(nm-m)+nm+1} Z_1^{(n-1)^2+n} X_1 Y_1 K_o + \ldots + n^{2nm-m+1} Z_1^{2n-1} (X_1 Y_1 K_o)^{n-1} -$$

$$- n^{n(nm-1)} Z_1^{nn} + n^{(n-1)(nm-1)} Z_1^{n(n-1)+n-1} Z_2^{n-1} - \ldots - n^{2nm-m} Z_1^{2n-1} Z_2^{n-1} = 0 \qquad (40)$$

X-делится на n.

$$X_2^n = n^{n(nm-m)} X_1^{n(n-1)} + nn^{(n-1)(nm-m)} X_1^{(n-1)^2} Z_1 Y_1 K_o + \ldots + nn^{(nm-m)} X_1^{(n-1)} (Z_1 Y_1 K_o)^{n-1} + (Z_1 Y_1 K_o)^n$$

$$(41)$$

$$(Z_1 Y_1 K_o)^n = \frac{(Z_1^n - n^{nm-1} X_1^n - Y_1^n)^n}{2^n n^{nm} X_1^n} = \frac{(2 n^m X_1 X_2 - 2 n^{nm-1} X_1^n)^n}{2^n n^{nm} X_1^n} =$$

$$= \frac{n^{nm} X_1^n X_2^n - n n^{nm-m} X_1^{n-1} X_2^{n-1} n^{nm-1} X_1^n + \ldots + n n^m X_1 X_2 n^{(nm-1)(n-1)} X_1^{n(n-1)} - n^{n(nm-1)} X_1^{nn}}{n^{nm} X_1^n}$$

$$(42)$$

$$n^{n(nm-m)+mn} X_1^{n(n-1)+n} + n^{(n-1)(nm-m)+nm+1} X_1^{(n-1)^2+n} Z_1 Y_1 K_o + \ldots + n^{2nm-m+1} X_1^{2n-1} (Z_1 Y_1 K_o)^{n-1} -$$

$$- n^{2nm-m} X_1^{2n-1} X_2^{n-1} + \ldots + n n^m X_1 X_2 n^{(nm-1)(n-1)} X_1^{n(n-1)} - n^{n(nm-1)} X_1^{nn} = 0 \qquad (43)$$

Y-делится на n.

$$Y_2^n = n^{n(nm-m)} Y_1^{n(n-1)} + nn^{(n-1)(nm-m)} Y_1^{(n-1)^2} Z_1 X_1 K_o + \ldots + nn^{(nm-m)} Y_1^{(n-1)} (Z_1 X_1 K_o)^{n-1} + (Z_1 X_1 K_o)^n$$

$$(44)$$

$$(Z_1 X_1 K_o)^n = \frac{(Z_1^n - n^{nm-1} Y_1^n - X_1^n)^n}{2^n n^{nm} Y_1^n} = \frac{(2 n^m Y_1 Y_2 - 2 n^{nm-1} Y_1^n)^n}{2^n n^{nm} Y_1^n} =$$

$$= \frac{n^{nm} Y_1^n Y_2^n - n n^{nm-m} Y_1^{n-1} Y_2^{n-1} n^{nm-1} Y_1^n + \ldots + n n^m Y_1 Y_2 n^{(nm-1)(n-1)} Y_1^{n(n-1)} - n^{n(nm-1)} Y_1^{nn}}{n^{nm} Y_1^n} \qquad (45)$$

$$n^{n(nm-m)+mn} Y_1^{n(n-1)+n} + n^{(n-1)(nm-m)+nm+1} Y_1^{(n-1)^2+n} Z_1 X_1 K_o + \ldots + n^{2nm-m+1} Y_1^{2n-1} (Z_1 X_1 K_o)^{n-1} -$$

$$- n^{2nm-m} Y_1^{2n-1} Y_2^{n-1} + \ldots + n\, n^m Y_1 Y_2\, n^{(nm-1)(n-1)} Y_1^{n(n-1)} - n^{n(nm-1)} Y_1^{nn} = 0 \qquad (46)$$

После выноса за скобки $n^{2nm-m} Z_1^{2n-1}$ *в (40)* Z_2 *должен содержать n,что невозможно .Аналогично для* X_2, Y_2 *(43),(46).*

5. *Начиная с третьей степени -решения нет!*

Таким образом при любом простом n , из (18) следует :

$$(X+Y)^n - Z^n = n^2 L \qquad (47)$$

где n^2 *-минимальное значение степени n. L- значение произведения множителей остальной правой части (18).*

Для третьей степени:

$$(X+Y)^3 - Z^3 = 3XY(X+Y) \qquad (48)$$

Z или X, или Y неизбежно содержит 3, так как левая часть делится как минимум на 3^2 *.*

$$Z_2^3 = (3^{2m} Z_1^2 - X_1 Y_1 K_o)^3 =$$

$$= 3^{6m} Z_1^6 - 3^{4m+1} Z_1^4 X_1 Y_1 K_o + 3^{2m+1} Z_1^2 (X_1 Y_1 K_o)^2 - (X_1 Y_1 K_o)^3 \qquad (49)$$

$$\frac{(X_1 Y_1 K_o)^3}{3^{3m} Z_1^3} = \frac{(3^{3m-1} Z_1^3 - 3^m Z_1 Z_2)^3}{3^{3m} Z_1^3} \qquad (50)$$

$$3^{9m} Z_1^9 - 3^{7m+1} Z_1^7 X_1 Y_1 K_o + 3^{5m+1} Z_1^5 (X_1 Y_1 K_o)^2 - 3^{9m-3} Z_1^9 + 3^{7m-1} Z_1^7 Z_2 + 3^{5m} Z_1^5 Z_2^2 = 0 \qquad (51)$$

После выноса за скобки $3^{5m} Z_1^5$ *за скобки.* Z_2 *должен содержать 3,что не - возможно .Аналогично для* X_2, Y_2 $\therefore$

И для любого простого n:

Умножаем на $(X+Y)^{2n_w}+Z^{2n_w}$ *, где* $2\ n_w$ *-чётная степень , которая в сумме с третьей степенью даст любое простое* $n=3+2n_w$

$$(X+Y)^n-Z^n=3XY(X+Y)[(X+Y)^{2n_w}+Z^{2n_w}]+(X+Y)^3\ Z^3[(X+Y)^{2n_w-3}-Z^{2n_w-3}] \quad (52)$$

Пусть X_n, Y_n, Z_n *есть решения уравнения . Подставив их в (52) имеем, что любой из трёх делится ,неизбежно, на простое n , так как левая часть делится на* n^2 *, а справа во вторых квадратных скобках множитель X+Y – Z ,содержащий n. Поэтому 3XY(X+Y) либо* $(X+Y)^{2n_w}+Z^{2n_w}$ *делится на n.*

Так как $(X+Y)^{2n_w}-Z^{2n_w}$ *содержит n,*

то следует необходимое условие деления нацело одного из Z, X, Y, что приведёт к пункту4.

6. Вывод.

Если в (01) степень нечётная решения нет. Ферма ,доказав отсутствие решения для четвёртой степени, тем самым доказал его отсутствие для всех $n=2^m$

Теорема Ферма разрешима в первой и второй степенях!

Используемые источники:

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%A4%D0%B5%D1%80%D0%BC%D0%B0

.