

Гравитационное отклонение света 2

[Владимир Браун](#)

10.10.2020

В предыдущей статье угол отклонения луча света в поле тяготения был получен как угол между асимптотами гиперболической траектории луча. То есть было получено точное выражение для угла отклонения на бесконечно большом расстоянии от центра тяготения, которое для угла отклонения на конечном расстоянии от центра является лишь приближением. А можно ли получить для отклонения на конечном расстоянии точное выражение? Такое выражение было бы пригодно не только для скорости света, но для любой гиперболической скорости.

Уравнение конического сечения, и любой кеплеровой траектории, в том числе и гиперболической, в полярной системе координат (r, φ) ,

$$r = \frac{f}{1 - e \sin \varphi},$$

где r – полярный радиус, расстояние от центра тяготения,

φ – полярный угол, отсчитываемый от полярной оси,

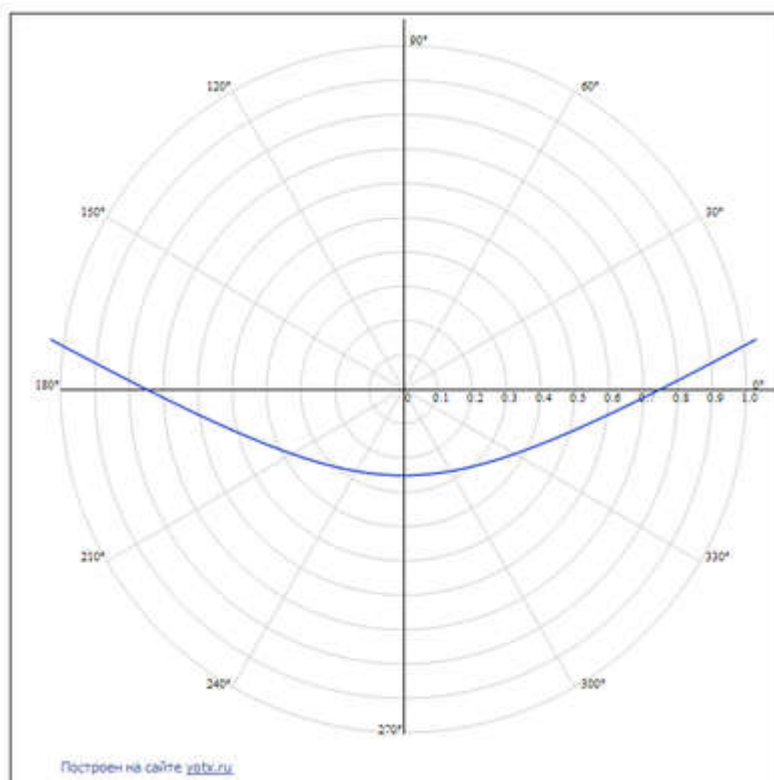
e – эксцентриситет траектории,

f – фокальный параметр траектории,

даёт зависимость полярного угла от расстояния:

$$\varphi = \arcsin \frac{r - f}{er}.$$

График гиперболы с приведённым выше уравнением расположен вдоль полярной оси:



Примечание. С данным уравнением предельный угол отклонения, или угол между асимптотами гиперболы, выводится исключительно просто:

$$\gamma_{\infty} = 2\varphi_{\infty} = 2 \lim_{r \rightarrow \infty} \arcsin \frac{r-f}{er} = 2 \arcsin \frac{1}{e} \approx \frac{2}{e}.$$

Итак. Как ясно из рисунка, текущий угол отклонения равен сумме угла радиус-вектора с полярной осью, φ , и угла траектории с радиус-вектором, θ :

$$\gamma_{1,2} = \varphi + \theta,$$

Что за индексы у угла отклонения? Источник света (звезда) и место наблюдения (Земля) находятся на разных расстояниях от центра тяготения (Солнца). Поэтому мы не можем просто удвоить отклонение, полученное для одной части траектории, как при вычислении предельного отклонения. Мы должны рассчитывать отклонение на каждом участке траектории, до и после центра тяготения, по отдельности. Участок траектории от звезды до Солнца обозначен индексом 1, а участок от Солнца до Земли – индексом 2.

В моём обобщении Ньютоновой теории тяготения, наряду с ранее известной угловой составляющей орбитальной скорости (угловой скоростью),

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2},$$

становится известной и радиальная составляющая скорости (радиальная скорость):

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{v_{\infty}^2 (r-a)(r-p)}}{r}.$$

Поэтому нам не составит труда вычислить угол траектории с радиус-вектором:

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{r\dot{\varphi}}{\dot{r}}.$$

Используя кроме названного также равенства:

$$e = \frac{a-p}{a+p}, \quad f = \frac{2ap}{a+p}, \quad L = \sqrt{-v_{\infty}^2 ap},$$

приведём сумму углов φ и θ к виду:

$$\varphi + \theta = \arcsin \frac{(a+p)r - 2ap}{(a-p)r} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ap}{(a-r)(r-p)}},$$

и наконец, тригонометрическими преобразованиями – к виду:

$$\varphi + \theta = \arcsin \left(\frac{1}{e} \sqrt{\frac{(r-a)(r-p)}{(r-a-p)r}} \right).$$

В результате получаем для текущего отклонения абсолютно точную формулу:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \arcsin \left(\frac{1}{e} \sqrt{\frac{(R-a)(R-p)}{(R-a-p)R}} \right) + \arcsin \left(\frac{1}{e} \sqrt{\frac{(r-a)(r-p)}{(r-a-p)r}} \right),$$

где R – расстояние от звезды до Солнца, а r – расстояние от Солнца до Земли.

Расстояние до звёзд настолько велико, что мы можем без потери точности положить его в формуле бесконечно большим:

$$\gamma_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \arcsin \left(\frac{1}{e} \sqrt{\frac{(R-a)(R-p)}{(R-a-p)R}} \right) = \arcsin \frac{1}{e},$$

тогда точная формула текущего отклонения примет вид:

$$\gamma = \arcsin \frac{1}{e} + \arcsin \left(\frac{1}{e} \sqrt{\frac{(r-a)(r-p)}{(r-a-p)r}} \right).$$

В случае света формула допускает дальнейшее упрощение – при очень малых углах арксинус можно заменить его аргументом.

В итоге получаем для текущего отклонения света следующую приближённую, но, тем не менее, практически вполне точную, формулу:

$$\gamma = \frac{1}{e} \left(1 + \sqrt{\frac{(r-a)(r-p)}{(r-a-p)r}} \right).$$

Посчитаем теперь величину отклонения луча света, проходящего вблизи поверхности Солнца, на конкретных расстояниях от центра тяготения – на расстояниях длин больших полуосей орбит планет, и некоторых других:

Солнце	6,9551e8	0,438038057"
	0,0047 а.е.	0,502269039"
	0,0050 а.е.	0,599220802"
	0,0070 а.е.	0,765506653"
	0,0100 а.е.	0,825856173"
	0,1000 а.е.	0,875602444"
Меркурий	0,3871 а.е.	0,876044519"
Венера	0,7233 а.е.	0,876067064"
Земля	1,0000 а.е.	0,876071379"
Марс	1,5237 а.е.	0,876074074"
Юпитер	5,2026 а.е.	0,876075938"
Сатурн	9,5549 а.е.	0,876076061"
Уран	19,2185 а.е.	0,876076100"
Нептун	30,1104 а.е.	0,876076108"
Плутон	39,5447 а.е.	0,876076110"
	∞	0,876076113"