Метод равносильных масс в задаче трёх тел

Владимир Браун

20.04.2021

В статье "Близкодействие и задача двух тел" показан простой метод решения, который можно назвать методом равносильных масс. Суть метода заключается в том, что для каждого взаимодействующего тела другое тело формально заменяется равносильным ему телом в центре масс. В результате задача распадается на две отдельные задачи о движении тела в центральном поле.

Работает ли этот метод в задаче трёх тел? Как известно, общее аналитическое решение задачи трёх тел невозможно. Аналитическое решение существует лишь в некоторых исключительных случаях, и известно всего два случая, в которых движение происходит по кеплеровым орбитам – прямолинейные решения Эйлера и треугольные решения Лагранжа. Метод равносильных масс даёт кеплеровы орбиты.

Три тела (материальные точки) составляют треугольник или лежат на одной прямой. Рассмотрим треугольную конфигурацию.

Координаты центра масс трёх тел даются выражениями:

$$x_\text{c} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \qquad y_\text{c} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Заменим координаты тел расстояниями между ними. Для этого поместим одну из точек в начало координат, другую – на ось абсцисс, тогда координаты этих точек можно сразу записать, а координаты третьей вычислить, через длины сторон треугольника. Вычислив затем расстояния от центра масс до каждого из тел, получим для них независящие от координат выражения, однозначно определяющие положение центра масс в треугольнике тел:

$$r_1 = \frac{\sqrt{c^2 m_2^2 + \left(b^2 + c^2 - a^2\right) m_2 m_3 + b^2 m_3^2}}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{a^2 m_3^2 + \left(c^2 + a^2 - b^2\right) m_3 m_1 + c^2 m_1^2}}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$r_3 = \frac{\sqrt{b^2 m_1^2 + \left(a^2 + b^2 - c^2\right) m_1 m_2 + a^2 m_2^2}}{m_1 + m_2 + m_3},$$

где $a = r_{23}$ – расстояние между телами m_2 и m_3,

$b = r_{31}$ – расстояние между телами m_3 и m_1,

$c = r_{12}$ – расстояние между телами m_1 и m_2.

Но, взяв какой-нибудь конкретный набор масс и расстояний, нетрудно убедиться, что равнодействующие силы, действующие на одно из тел со стороны двух других тел, через центр масс не проходят. Причём, направления всех трёх таких сил пересекаются в одной точке. То есть, в случае трёх тел кроме центра масс существует ещё и центр сил, в общем случае с центром масс не совпадающий.

Вычислим положение предполагаемого центра сил, так же, как и в случае центра масс, через расстояния до тел. Найдём для этого уравнения прямых, коллинеарных векторам указанных равнодействующих сил, и найдём точки попарного пересечения этих прямых. В результате оказывается, что точки пересечения совпадают, и значит, центр сил в системе трёх тел, действительно, существует. Вычислив расстояния между центром сил и телами, получим:

$$r_1 = \frac{bc\sqrt{b^4 m_2^2 + bc\left(b^2 + c^2 - a^2\right)m_2 m_3 + c^4 m_3^2}}{a^3 m_1 + b^3 m_2 + c^3 m_3},$$

$$r_2 = \frac{ca\sqrt{c^4 m_3^2 + ca\left(c^2 + a^2 - b^2\right)m_3 m_1 + a^4 m_1^2}}{a^3 m_1 + b^3 m_2 + c^3 m_3},$$

$$r_3 = \frac{ab\sqrt{a^4 m_1^2 + ab\left(a^2 + b^2 - c^2\right)m_1 m_2 + b^4 m_2^2}}{a^3 m_1 + b^3 m_2 + c^3 m_3}.$$

Как видим, центр сил с центром масс в общем случае не совпадает.

Чтобы равносильные массы могли быть в центре масс, он должен совпадать с центром сил, что выполняется, если расстояния между телами одинаковы. Действительно, пусть это расстояние равно r, тогда подставив его вместо a, b и c, получим для расстояний от центра масс и от центра сил до тел совпадающие выражения:

$$r_1 = r\frac{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$r_2 = r\frac{\sqrt{m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2}}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$r_3 = r\frac{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Вычислив теперь равносильные массы в центре сил и масс, получим:

$$M_{23} = \frac{\left(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(m_1 + m_2 + m_3\right)^2},$$

$$M_{31} = \frac{\left(m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(m_1 + m_2 + m_3\right)^2},$$

$$M_{12} = \frac{\left(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(m_1 + m_2 + m_3\right)^2}.$$

Таким образом, мы получаем следующее частное решение задачи трёх тел, соответствующее треугольному решению Лагранжа:

Если расстояния между телами одинаковы, то в системе отсчёта связанной с центром масс каждое тело будет двигаться так, как будто оно движется в центральном поле расположенного в центре масс тела равносильного двум другим телам (тело m_1 – в поле массы M_{23}, тело m_2 – в поле массы M_{31}, и тело m_3 – в поле массы M_{12}).

Имея решение в системе центра масс, нетрудно получить и соответствующее ему решение в относительной системе отсчёта – в неинерциальной невращающейся системе отсчёта связанной с одним из тел.

В силу пропорциональности расстояний, $r_i \sim r$, в относительной системе отсчёта тела будут двигаться по траекториям, подобным траекториям в системе центра масс. Поэтому, так же, как и в случае задачи двух тел, решение может быть получено путём представления периода обращения по эллиптической орбите в виде, соответствующем относительной системе отсчёта.

Период обращения тела m_1 вокруг равносильной массы M_{23} равен

$$T = \pi\sqrt{\frac{(a_1 + p_1)^3}{2GM_{23}}},$$

где a_1 и p_1 – апоцентр и перицентр траектории.
Имеем следующие соотношения:

$$M_{23} = \frac{\left(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \quad \text{и} \quad r_1 = r\frac{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Из последнего следует также:

$$a_1 + p_1 = (a + p)\frac{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Поэтому период обращения может быть представлен в виде:

$$T = \pi\sqrt{\frac{(a_1 + p_1)^3}{2GM_{23}}} = \pi\sqrt{\frac{\left((a + p)\frac{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}}{m_1 + m_2 + m_3}\right)^3}{2G\frac{\left(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}}} = \pi\sqrt{\frac{(a + p)^3}{2G(m_1 + m_2 + m_3)}}.$$

Что можно интерпретировать так, что период обращения в относительной системе отсчёта, в которой большая ось траектории равна $a + p$, есть период обращения в центральном поле тела массой $m_1 + m_2 + m_3$.

То есть, в относительной системе отсчёта, связанной с одним из тел, два других тела движутся так, как будто они движутся в центральном поле тела массой $m_1 + m_2 + m_3$.

Рассмотрим конкретный пример.

> Три тела, массой 1, 2 и 3 кг, находясь на равных расстояниях друг от друга, обращаются вокруг их общего центра масс так, что минимальное расстояние между ними равно 1 м, а максимальное – 2 м.
>
> Найти период обращения тел, минимальные и максимальные скорости тел, как в относительной системе отсчёта, так и в системе центра масс, и построить траектории движения тел в обеих системах отсчёта.

Для нахождения периода обращения достаточно подставить исходные данные в полученную выше формулу:

$$T = \pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2\mathrm{G}(m_1+m_2+m_3)}} = \pi\sqrt{\frac{(2+1)^3}{2\mathrm{G}(1+2+3)}} = 576837{,}168612\text{ с} = 6{,}68\text{ дней.}$$

То есть, период обращения трёх данных тел, при данных значениях минимального и максимального расстояния между ними, или перицентра и апоцентра траекторий в относительной системе отсчёта, составляет около одной недели.

Обратимся теперь к вычислению скоростей тел.

В относительной системе отсчёта связанной с одним из тел, два других тела обращаются вокруг него так, как будто они движутся в центральном поле тела суммарной массы:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 = 1 + 2 + 3 = 6\text{ кг.}$$

Находясь на равных расстояниях от условного центра тяготения, они движутся с одинаковой скоростью.

Скорость тела в центральном поле даётся формулой

$$v^2 = 2\varphi + v_\infty^2,$$

где $\varphi = \frac{\mathrm{G}M}{r}$ – кинетический, положительный, потенциал поля тяготения, и $v_\infty^2 = -\frac{2\mathrm{G}M}{a+p}$ – квадрат остаточной скорости тела. То есть, в конечном счёте, формулой

$$v = \sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a+p}\right)},$$

где r – расстояние от центра тяготения.

Минимальная и максимальная скорости – это скорости в апоцентре и перицентре траектории, т.е. на расстоянии a и p от центра тяготения, соответственно:

$$v_{\min} = \sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+p}\right)} = \sqrt{12\mathrm{G}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = \sqrt{2\mathrm{G}} = 0{,}000012\text{ м/с,}$$

$$v_{\max} = \sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{a+p}\right)} = \sqrt{12\mathrm{G}\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = 2\sqrt{2\mathrm{G}} = 0{,}000023\text{ м/с.}$$

В системе центра масс получаем:

$$M_{23} = \frac{\left(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(m_1 + m_2 + m_3\right)^2} = \frac{\left(4+6+9\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+2+3\right)^2} = \frac{\sqrt{19^3}}{36} = 2{,}301 \text{ кг},$$

$$M_{31} = \frac{\left(m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(m_1 + m_2 + m_3\right)^2} = \frac{\left(9+3+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+2+3\right)^2} = \frac{\sqrt{13^3}}{36} = 1{,}302 \text{ кг},$$

$$M_{12} = \frac{\left(m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(m_1 + m_2 + m_3\right)^2} = \frac{\left(1+2+4\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+2+3\right)^2} = \frac{\sqrt{7^3}}{36} = 0{,}514 \text{ кг}.$$

$$a_1 = a\frac{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}}{m_1 + m_2 + m_3} = 2\frac{\sqrt{19}}{6} = 1{,}453 \text{ м},$$

$$a_2 = a\frac{\sqrt{m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2}}{m_1 + m_2 + m_3} = 2\frac{\sqrt{13}}{6} = 1{,}202 \text{ м},$$

$$a_3 = a\frac{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1 + m_2 + m_3} = 2\frac{\sqrt{7}}{6} = 0{,}882 \text{ м},$$

$$p_1 = p\frac{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\sqrt{19}}{6} = 0{,}726 \text{ м},$$

$$p_2 = p\frac{\sqrt{m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\sqrt{13}}{6} = 0{,}601 \text{ м},$$

$$p_3 = p\frac{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\sqrt{7}}{6} = 0{,}441 \text{ м}.$$

$$v_{\min\_1} = \sqrt{2\mathrm{G}M_{23}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + p_1}\right)} = \sqrt{\frac{\sqrt{19}}{3}\mathrm{G}} = 0{,}000010 \text{ м/с},$$

$$v_{\min\_2} = \sqrt{2\mathrm{G}M_{31}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_2 + p_2}\right)} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}}{3}\mathrm{G}} = 0{,}000009 \text{ м/с},$$

$$v_{\min\_3} = \sqrt{2\mathrm{G}M_{12}\left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_3 + p_3}\right)} = \sqrt{\frac{\sqrt{7}}{3}\mathrm{G}} = 0{,}000008 \text{ м/с},$$

$$v_{\max\_1} = \sqrt{2\mathrm{G}M_{23}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{a_1 + p_1}\right)} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{19}}{3}\mathrm{G}} = 0{,}000020 \text{ м/с},$$

$$v_{\max\_2} = \sqrt{2\mathrm{G}M_{31}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{a_2 + p_2}\right)} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{13}}{3}\mathrm{G}} = 0{,}000018 \text{ м/с},$$

$$v_{\max\_3} = \sqrt{2\mathrm{G}M_{12}\left(\frac{1}{p_3} - \frac{1}{a_3 + p_3}\right)} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{7}}{3}\mathrm{G}} = 0{,}000015 \text{ м/с}.$$

И наконец, обратимся к траекториям тел.

В полярной системе координат (r, φ) имеем следующее уравнение траектории:

$$r = \frac{f}{1 - e\sin(\varphi + \varphi_0)},$$

где r – полярный радиус, расстояние от центра тяготения,

φ – полярный угол, отсчитываемый от полярной оси,

e – эксцентриситет траектории,

f – фокальный параметр траектории.

Относительная система отсчёта.

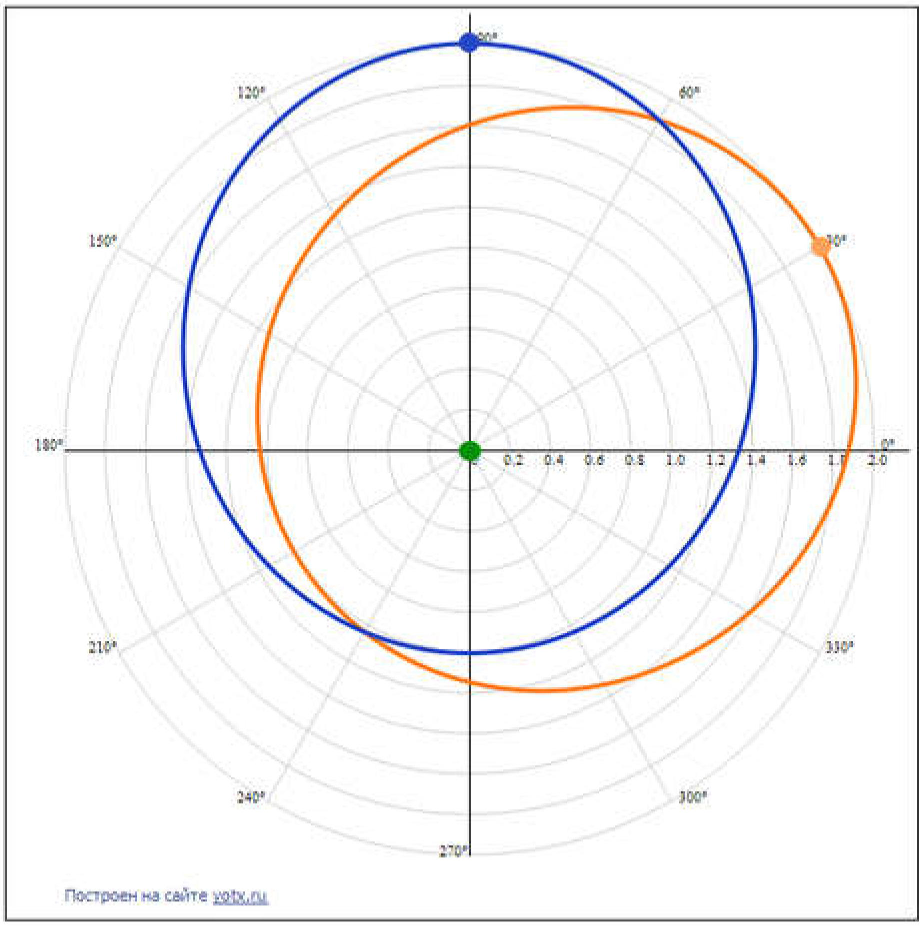
Эксцентриситет и фокальный параметр траектории напрямую связаны со значениями апоцентра и перицентра траектории:

$$e = \frac{a - p}{a + p} = \frac{1}{3}, \quad f = \frac{2ap}{a + p} = \frac{4}{3}.$$

Поскольку тела всегда находятся в вершинах равностороннего треугольника, то траектории двух тел, обращающихся вокруг третьего тела, смещены по фазе на 60°.

Подставляя эти значения в символьное уравнение траектории, приходим к уравнениям:

$$r = \frac{4}{3 - \sin\varphi} \quad \text{и} \quad r = \frac{4}{3 - \sin(\varphi + \pi/3)}.$$



В системе центра масс, траектории тел отличаются как по фазе, так и по размерам.

В силу пропорциональности расстояний, $r_i \sim r$, все траектории (как в относительной системе, так и в системе центра масс) имеют одинаковый эксцентриситет – подобны. Действительно,

$$e_1 = \frac{a_1 - p_1}{a_1 + p_1} = \frac{ka - kp}{ka + kp} = \frac{a - p}{a + p} = e = \frac{1}{3}.$$

Однако у каждой траектории будет свой фокальный параметр:

$$f_1 = f\frac{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{19}}{6} = \frac{2\sqrt{19}}{9},$$

$$f_2 = f\frac{\sqrt{m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{13}}{6} = \frac{2\sqrt{13}}{9},$$

$$f_3 = f\frac{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{7}}{6} = \frac{2\sqrt{7}}{9} \quad .$$

Поскольку центр масс в общем случае находится не в центре треугольника тел, траектории тел смещены друг относительно друга по фазе неодинаково, на некоторый угол зависящий от положения центра масс. Один из углов смещения можно задать произвольно (ноль), остальные – относительно него, в минус и в плюс. Углы при центре масс, лежащие против сторон треугольника, *r*, находятся из теоремы косинусов:

$$\varphi_{12} = \arccos\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1 r_2}\right) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{19}\sqrt{13}}\right),$$

$$\varphi_{23} = \arccos\left(\frac{r_2^2 + r_3^2 - r^2}{2r_2 r_3}\right) = \arccos\left(\frac{-8}{\sqrt{13}\sqrt{7}}\right),$$

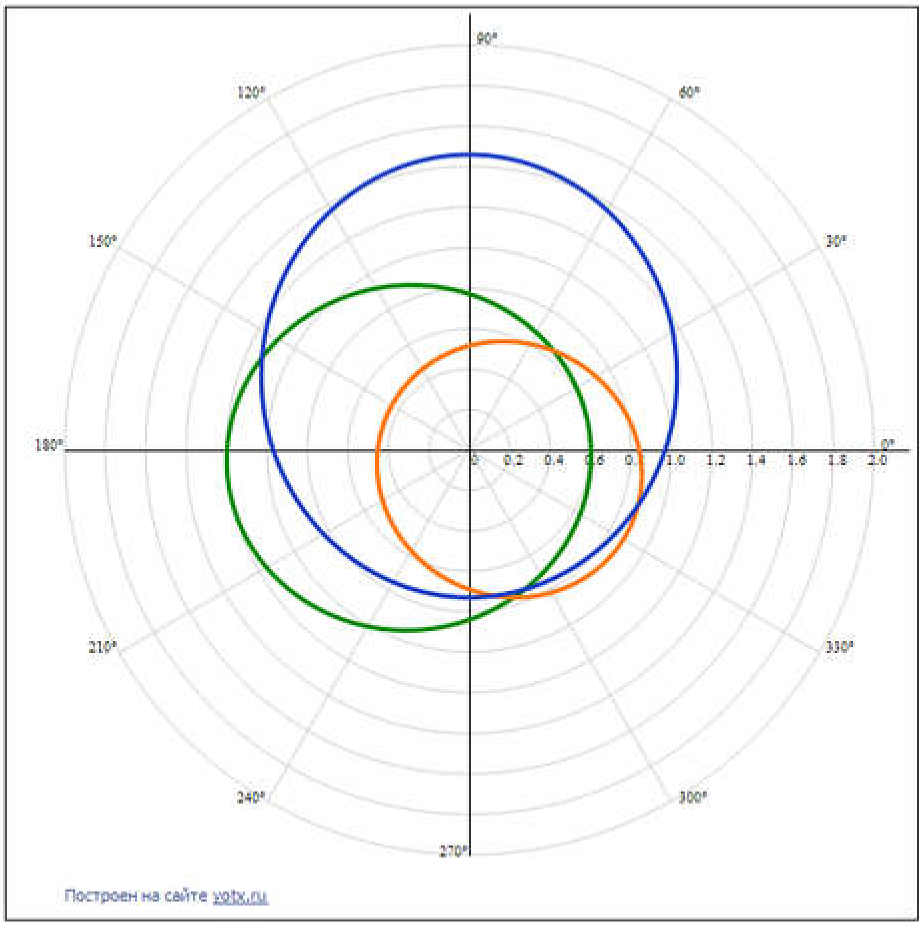
$$\varphi_{31} = \arccos\left(\frac{r_3^2 + r_1^2 - r^2}{2r_3 r_1}\right) = \arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{7}\sqrt{19}}\right).$$

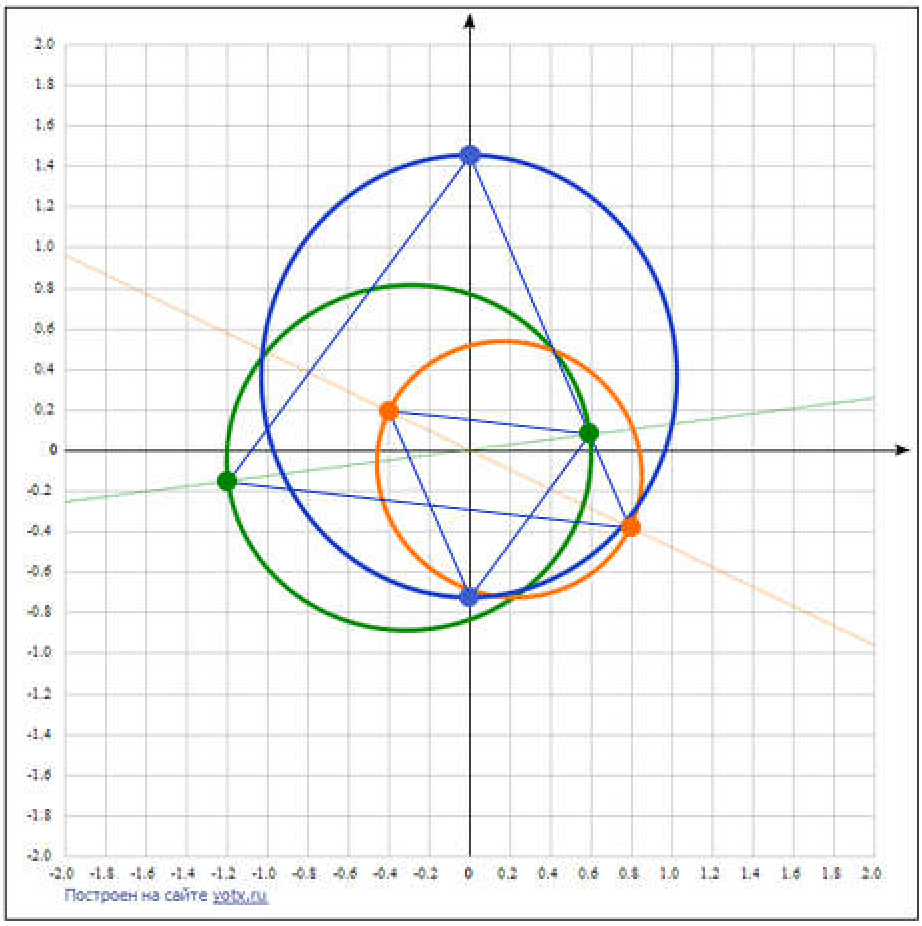
Подставляя эти значения в символьное уравнение траектории, приходим к уравнениям:

$$r_1 = \frac{2\sqrt{19}}{9 - 3\sin\varphi},$$

$$r_2 = \frac{2\sqrt{13}}{9 - 3\sin\left(\varphi - \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{19}\sqrt{13}}\right)\right)},$$

$$r_3 = \frac{2\sqrt{7}}{9 - 3\sin\left(\varphi + \arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{7}\sqrt{19}}\right)\right)}.$$


90°
120°
60°
150°
30°
180°
0°
0
0.2
0.4
0.6
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
210°
330°
240°
300°
270°
Построен на сайте yotx.ru


2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
-1.2
-1.4
-1.6
-1.8
-2.0
-2.0 -1.8 -1.6 -1.4 -1.2 -1.0 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2 1.4 1.6 1.8 2.0
Построен на сайте yotx.ru