Метод равносильных масс в задаче трёх тел 2

Владимир Браун

03.05.2021

Продолжим поиск решений задачи трёх тел с помощью метода равносильных масс – посмотрим, как с его помощью получаются решения соответствующие прямолинейным решениям Эйлера.

Прямолинейная конфигурация трёх тел кажется проще треугольной. На деле это не совсем так. Решение несложное, но в сравнении с треугольным выглядит громоздко, так как не обладает такой симметрией, как последнее.

Координата центра масс трёх тел на прямой линии, оси *x*, даётся выражением:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Поместим тело m_1 в начало координат, а тела m_2 и m_3, в таком порядке, – справа от него. Пусть $r_{12} = r$ – расстояние между телами m_1 и m_2,

$r_{23} = kr$ – расстояние между телами m_2 и m_3,

$r_{31} = r + kr$ – расстояние между телами m_3 и m_1.

Тогда координаты тел будут равны:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = r, \quad x_3 = r + kr,$$

координата центра масс –

$$x_c = r\frac{m_2 + (k+1)m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

расстояния центра масс от тел –

$$r_1 = x_c - x_1, \qquad r_2 = |x_c - x_2|, \qquad r_3 = -(x_c - x_3),$$

или

$$r_1 = r\frac{m_2 + (k+1)m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad r_2 = r\frac{|km_3 - m_1|}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad r_3 = r\frac{(k+1)m_1 + km_2}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Посчитаем теперь силы, действующие на каждое из тел со стороны двух других тел. Имеем:

$$F_1 = F_{12} + F_{13}, \qquad F_2 = |F_{23} - F_{21}|, \qquad F_3 = F_{31} + F_{32},$$

где

$$F_{12} = F_{21} = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}, \quad F_{23} = F_{32} = \frac{Gm_2m_3}{r_{23}^2}, \quad F_{31} = F_{13} = \frac{Gm_3m_1}{r_{31}^2}.$$

Равносильные массы в центре масс найдутся из равенств:

$$\frac{Gm_1M_{23}}{r_1^2} = F_1, \qquad \frac{Gm_2M_{31}}{r_2^2} = F_2, \qquad \frac{Gm_3M_{12}}{r_3^2} = F_3.$$

В результате получаем для равносильных масс следующие выражения:

$$M_{23}=\frac{\left((k+1)^2 m_2+m_3\right)\left(m_2+(k+1)m_3\right)^2}{(k+1)^2\left(m_1+m_2+m_3\right)^2},$$

$$M_{31}=\frac{\left|k^2 m_1-m_3\right|\left(km_3-m_1\right)^2}{k^2\left(m_1+m_2+m_3\right)^2},$$

$$M_{12}=\frac{\left(k^2 m_1+(k+1)^2 m_2\right)\left((k+1)m_1+km_2\right)^2}{k^2(k+1)^2\left(m_1+m_2+m_3\right)^2}.$$

В случае треугольной конфигурации с получением выражений для равносильных масс решение завершено. В данном случае это не так.

Двигаясь по кеплеровым орбитам, оставаясь при этом на одной прямой друг с другом, тела движутся синхронно – одновременно проходят апоцентр, перицентр, и вообще любые одноимённые точки орбиты – период обращения тел одинаков.

Однако если по формулам:

$$T_1=\pi\sqrt{\frac{\left(a_1+p_1\right)^3}{2\mathrm{G}M_{23}}},\ T_2=\pi\sqrt{\frac{\left(a_2+p_2\right)^3}{2\mathrm{G}M_{31}}},\ T_3=\pi\sqrt{\frac{\left(a_3+p_3\right)^3}{2\mathrm{G}M_{12}}},$$

где

$$a_1+p_1=(a+p)\frac{m_2+(k+1)m_3}{m_1+m_2+m_3},$$

$$a_2+p_2=(a+p)\frac{\left|km_3-m_1\right|}{m_1+m_2+m_3},$$

$$a_2+p_2=(a+p)\frac{(k+1)m_1+km_2}{m_1+m_2+m_3},$$

и где a и p – апоцентр и перицентр относительного движения тел m_1 и m_2 или максимальное и минимальное значение расстояния r между ними,
посчитать период обращения для каждого из тел, то получим:

$$T_1=\pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2G\left(m_1+m_2+m_3\right)}(k+1)^2\,\frac{m_2+(k+1)m_3}{(k+1)^2 m_2+m_3}},$$

$$T_2=\pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2G\left(m_1+m_2+m_3\right)}k^2\left|\frac{km_3-m_1}{k^2 m_1-m_3}\right|},$$

$$T_3=\pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2G\left(m_1+m_2+m_3\right)}k^2(k+1)^2\,\frac{(k+1)m_1+km_2}{k^2 m_1+(k+1)^2 m_2}}.$$

Выражения периодов не совпадают, и при произвольном k период обращения не будет одинаковым. Следовательно, отношение расстояний между телами не может быть произвольным – коэффициент k следует установить из требования равенства периода обращения тел.

Приравняв любые два выражения периода (например, первое и третье), после преобразований получим алгебраическое уравнение пятой степени, имеющее по теореме Декарта о перемене знаков один вещественный корень:

$$(m_1 + m_2)k^5 + (3m_1 + 2m_2)k^4 + (3m_1 + m_2)k^3 - (m_2 + 3m_3)k^2 - (2m_2 + 3m_3)k - (m_2 + m_3) = 0$$

Как известно, уравнение пятой степени в радикалах не разрешимо, поэтому мы не можем записать решение задачи в окончательном виде, заменив *k* его выражением, но для конкретного набора масс параметр *k* находится численными методами.

В итоге, мы имеем следующее решение: находясь на расстояниях связанных коэффициентом *k*, тела движутся по кеплеровым орбитам так, как будто они движутся в центральном поле соответствующих равносильных масс.

Три тела разной массы могут располагаться друг относительно друга различным образом. Всего из трёх тел может быть составлено шесть разных перестановок:

1. $m_1 - m_2 - m_3$,
2. $m_2 - m_3 - m_1$,
3. $m_3 - m_1 - m_2$,
4. $m_3 - m_2 - m_1$,
5. $m_1 - m_3 - m_2$,
6. $m_2 - m_1 - m_3$.

Первые три перестановки получаются друг из друга циклической перестановкой тел, следующие три зеркально симметричны первым трём.

Таким образом, для всякого набора масс (m_1, m_2, m_3) существует шесть решений, соответствующих 6-ти перестановкам тел. Но обычно говорят лишь о трёх разных решениях, полагая зеркально-симметричные перестановки тел идентичными.

Есть два способа, как получить все решения из одного, не решая задачу заново.

1-ый. Все решения получаются из одного соответствующей перестановкой индексов. При этом обозначения масс остаются неизменными, например: (m_1, m_2, m_3) = (3, 4, 5).

2-ой. Имеющееся решение применяется ко всем перестановкам тел, для этого просто меняются обозначения тел:

1. (m_1, m_2, m_3) = (3, 4, 5),
2. (m_1, m_2, m_3) = (4, 5, 3),
3. (m_1, m_2, m_3) = (5, 3, 4),

Второй вариант проще, но следует иметь в виду, что тела в нём именуются не по массе, а по месту в перестановке: первое, второе, третье (левое, среднее, правое).

Рассмотрим следующий пример.

> Три тела, массой 1, 2 и 3 кг, лежащие на одной прямой, обращаются вокруг их общего центра масс так, что минимальное расстояние между первым и вторым (левым и средним) телом равно 1 м, а максимальное – 3 м.
>
> Для всех возможных расположений тел найти период обращения тел, построить траектории движения тел в системе центра масс.

При заданном условии все шесть возможных расположений тел различны. Но расположения тел соответствующие зеркально-симметричным перестановкам отличаются друг от друга несущественно – кроме зеркальности, лишь масштабом. Ограничимся поэтому тремя, существенно разными, перестановками:

1. $(m_1,\ m_2,\ m_3) = (1, 2, 3)$,
2. $(m_1,\ m_2,\ m_3) = (2, 3, 1)$,
3. $(m_1,\ m_2,\ m_3) = (3, 1, 2)$.

Вычислим сначала параметр k для каждой из 3-х перестановок тел.
Подставляя каждый раз массы тел в общее уравнение

$$(m_1 + m_2)k^5 + (3m_1 + 2m_2)k^4 + (3m_1 + m_2)k^3 - (m_2 + 3m_3)k^2 - (2m_2 + 3m_3)k - (m_2 + m_3) = 0$$

получим для перестановок следующие уравнения и их корни:

1. $3k^5 + 7k^4 + 5k^3 - 11k^2 - 13k - 5 = 0$, $\quad k = 1{,}2809479279894849990$,
2. $5k^5 + 12k^4 + 9k^3 - 6k^2 - 9k - 4 = 0$, $\quad k = 0{,}8918814718856416930$,
3. $4k^5 + 11k^4 + 10k^3 - 7k^2 - 8k - 3 = 0$, $\quad k = 0{,}8786259729031576776$.

Теперь можно вычислить периоды обращения тел во всех перестановках тел:

1. $T_1 = T_2 = T_3 =$ 1645250,533496 с = 19,04 дней,
2. $T_1 = T_2 = T_3 =$ 1084682,703993 с = 12,55 дней,
3. $T_1 = T_2 = T_3 =$ 1547558,925169 с = 17,91 дней.

Обратимся к траекториям тел в системе центра масс.

В полярной системе координат (r, φ) имеем следующее уравнение траектории:

$$r = \frac{f}{1 + e\cos(\varphi + \varphi_0)},$$

где r – полярный радиус, расстояние от центра тяготения,
φ – полярный угол, отсчитываемый от полярной оси,
e – эксцентриситет траектории,
f – фокальный параметр траектории.

Первое и второе тело, m_1 и m_2, в относительном движении друг относительно друга имеют следующие эксцентриситет и фокальный параметр:

$$e = \frac{a-p}{a+p} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}, \qquad f = \frac{2ap}{a+p} = \frac{2\cdot 3}{3+1} = \frac{3}{2}.$$

В силу пропорциональности расстояний, $r_i \sim r$, все траектории подобны и имеют одинаковый эксцентриситет, *e*, но у каждой траектории будет свой фокальный параметр:

$$f_1 = f\,\frac{m_2 + (k+1)m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$f_2 = f\,\frac{|km_3 - m_1|}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$f_3 = f\,\frac{(k+1)m_1 + km_2}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Кроме этого, следует определить начальные фазы траекторий.

Центр масс лежит между крайними телами, m_1 и m_3, т.е. эти тела находятся по разные стороны от центра масс и, следовательно, их траектории смещены по фазе на 180°.

Нужно также определить по какую сторону от центра масс лежит среднее тело, m_2. Определить это можно по знаку выражения $km_3 - m_1$, входящего в выражение расстояния этого тела от центра масс и в выражение фокального параметра его траектории под знаком модуля (абсолютной величины).

Отложив взятие модуля, вычислим значение фокального параметра со знаком:

$$f_2 = f\,\frac{km_3 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Положительный знак означает, что тело лежит слева от центра масс, на той же стороне, что и тело m_1, и, значит, его начальная фаза совпадает с начальной фазой этого тела. Отрицательный знак будет означать, что его фаза противоположна.

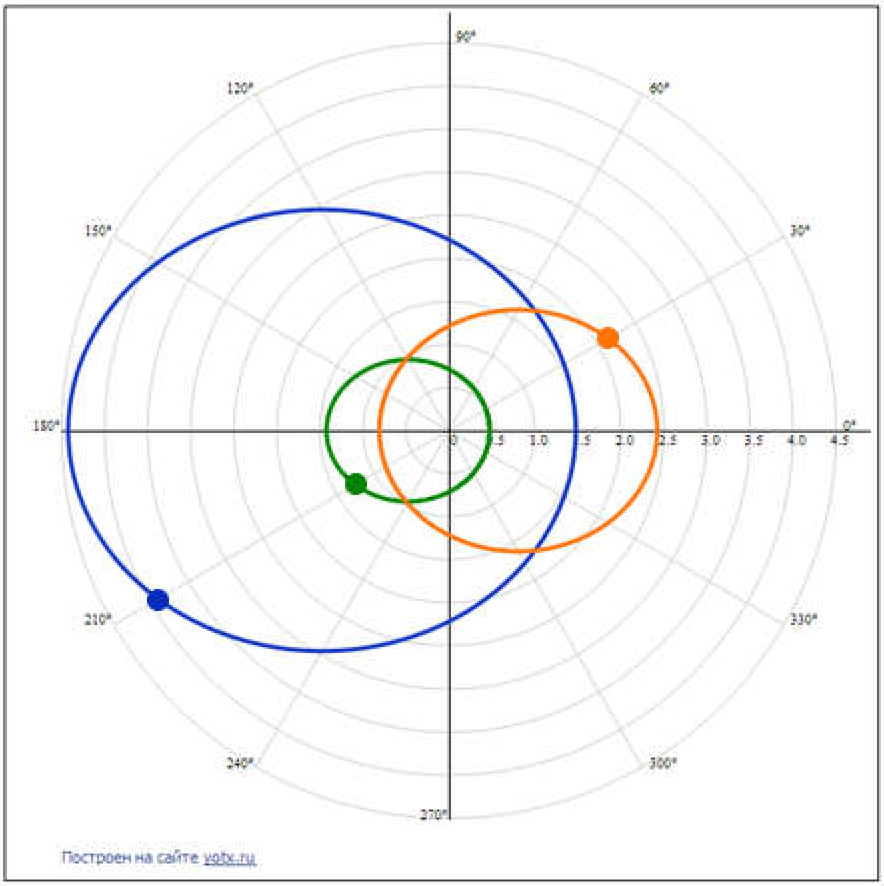
Подставляя значения эксцентриситета и фокального параметра в символьное уравнение траектории, и учитывая начальную фазу траектории, приходим к следующим уравнениям траекторий:

1. (1, 2, 3), $k = 1{,}281$: $\quad r_1 = \dfrac{4{,}421}{2+\cos\varphi}, \quad r_2 = \dfrac{1{,}421}{2+\cos\varphi}, \quad r_3 = \dfrac{2{,}421}{2+\cos(\varphi+\pi)};$

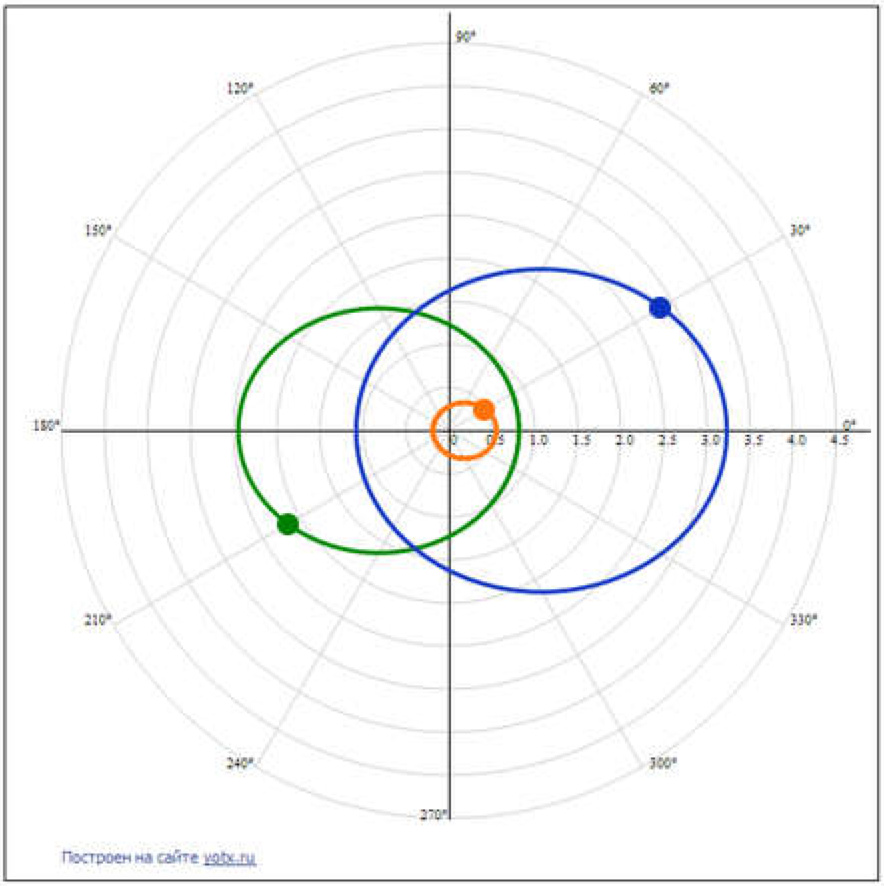
2. (2, 3, 1), $k = 0{,}892$: $\quad r_1 = \dfrac{2{,}446}{2+\cos\varphi}, \quad r_2 = \dfrac{|-0{,}554|}{2+\cos(\varphi+\pi)}, \quad r_3 = \dfrac{3{,}230}{2+\cos(\varphi+\pi)};$

3. (3, 1, 2), $k = 0{,}879$: $\quad r_1 = \dfrac{2{,}379}{2+\cos\varphi}, \quad r_2 = \dfrac{|-0{,}621|}{2+\cos(\varphi+\pi)}, \quad r_3 = \dfrac{3{,}257}{2+\cos(\varphi+\pi)}.$

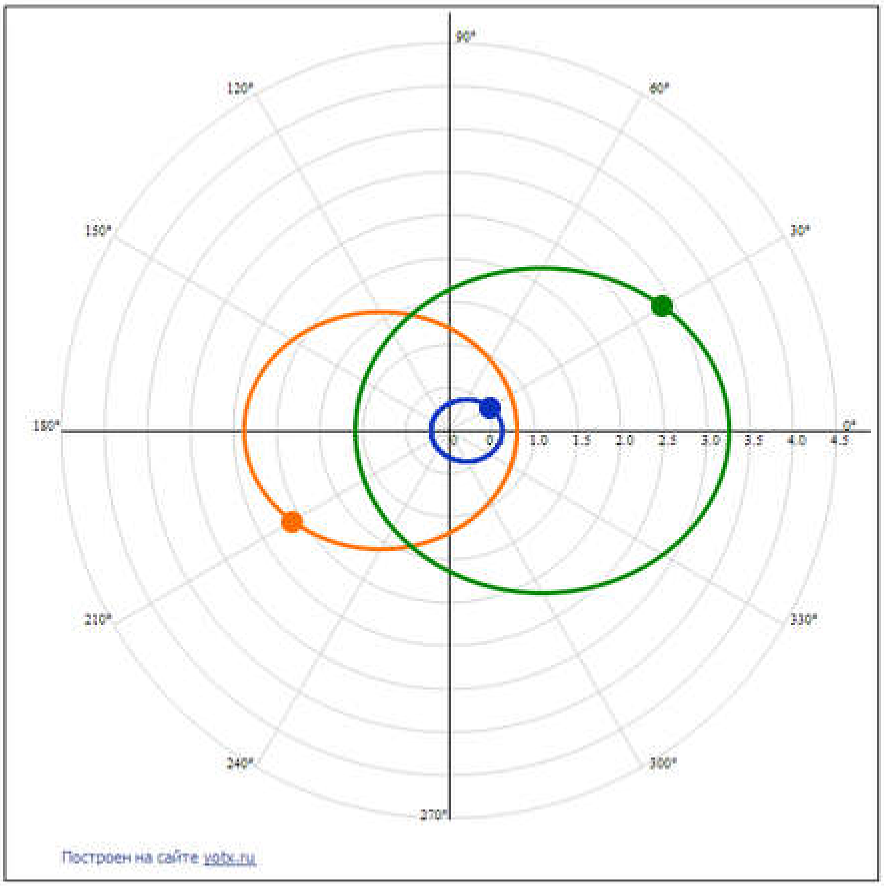
1. (1, 2, 3), k = 1,281:



2. (2, 3, 1), k = 0,892:



3. (3, 1, 2), k = 0,879:



На всех рисунках синим цветом показана траектория тела массой 1 кг, зелёным цветом – траектория тела массой 2 кг, и оранжевым цветом – траектория тела массой 3 кг.