Динамическая составляющая тяготения 2

Владимир Браун

11.02.2022

В данной статье уточняется концепция динамической составляющей тяготения, по которой тяготение имеет не только статическую составляющую, соответствующую закону всемирного тяготения, но и динамическую составляющую, ответственную за вращение всякой кеплеровой орбиты и связанной с ней инерциальной системы отсчёта.

В статье Динамическая составляющая тяготения для задачи двух тел было получено уравнение скорости в невращающейся относительной системе отсчёта:

$$v^2 = v_\infty^2 + \frac{2\mathrm{G}M}{r} + \frac{4\mathrm{G}^2M^2}{c^2r^2}, \tag{1}$$

и величина смещения кеплеровой орбиты, и связанной с ней инерциальной системы отсчёта, в невращающейся системе отсчёта в радианах за один период обращения:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\sqrt{1+\frac{4\mathrm{G}M}{c^2f}}-1\right) \approx 2\pi\frac{2\mathrm{G}M}{c^2f}. \tag{2}$$

Предполагалось, что уравнение (1) является общим для обеих невращающихся систем отсчёта – относительной и системы центра масс, и в обоих случаях приводит к одной и той же величине смещения. При этом в каждой из систем отсчёта используется своё представление массы условного центра тяготения, M, и расстояния от него, r, через массы тел и расстояние между ними.
В относительной системе отсчёта масса центра тяготения есть суммарная масса тел:

$$M = m_1 + m_2,$$

и расстояние от центра тяготения до тела есть расстояние между телами, r.
В системе центра масс для тела m_1 верно:

$$M_2 = \frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}, \qquad r_1 = r\frac{m_2}{m_1+m_2},$$

и для тела m_2:

$$M_1 = \frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}, \qquad r_2 = r\frac{m_1}{m_1+m_2}.$$

См.: Близкодействие и задача двух тел.

Однако на деле не всё так просто. Если в системе центра масс записать для тел уравнения аналогичные уравнению (1), и попытаться с их помощью получить выражения величины смещения, то увидим, что они не совпадают не только с выражением смещения в относительной системе отсчёта, но и между собой.

Но такого не должно быть. Величина смещения не может быть разной. Неодинаковое смещение кеплеровых орбит тел означало бы неодинаковую угловую скорость тел и нарушение закона сохранения момента импульса.

Давайте попробуем разобраться, в чём тут дело.

Получив из уравнения выражение смещения, мы можем и, наоборот, из выражения смещения получить исходное уравнение. Сделав это в относительной системе отсчёта, мы увидим, что параметр

$$\mathrm{K} = \frac{2\mathrm{G}M}{c^2 f},$$

входящий в выражение смещения (2), и который есть не что иное, как некоторое среднее коэффициента увлечения, появляется и в "исходном" уравнении:

$$v^2 = v_\infty^2 + \frac{2\mathrm{G}M}{r} + 2\mathrm{K}\frac{f\mathrm{G}M}{r^2}, \tag{3}$$

которое отличается от уравнения (1) лишь тем, что параметр f, входящий и в числитель и знаменатель (в K), ещё не сокращён.

Величина смещения должна быть одной и той же в обеих системах отсчёта, а в системе центра масс – для обоих тел. Следовательно, параметр K во всех трёх случаях один и тот же. То есть, входящие в него переменные, суммарная масса тел, $M = m_1 + m_2$, и параметр $f = 2ap/(a+p)$, где a и p – максимальное и минимальное расстояние между телами, есть независящие от системы отсчёта параметры системы тел.

Так мы приходим к заключению, что общим для обеих систем отсчёта является не уравнение (1), а его неупрощённый вариант – уравнение (3), в котором параметр K инвариантен по отношению к системам отсчёта.

Найдя правильное общее уравнение, мы можем теперь записать и правильные уравнения для каждого из тел в системе центра масс:

$$v_1^2 = v_{1\infty}^2 + \frac{2\mathrm{G}M_2}{r_1} + 2\mathrm{K}\frac{f_1\mathrm{G}M_2}{r_1^2},$$

$$v_2^2 = v_{2\infty}^2 + \frac{2\mathrm{G}M_1}{r_2} + 2\mathrm{K}\frac{f_2\mathrm{G}M_1}{r_2^2},$$

для тел m_1 и m_2, соответственно. Учитывая, что

$$\mathrm{K} = \frac{2\mathrm{G}M}{c^2 f}, \quad f_1 = f\frac{m_2}{M}, \quad f_2 = f\frac{m_1}{M},$$

после сокращения на M и f получим:

$$v_1^2 = v_{1\infty}^2 + \frac{2\mathrm{G}M_2}{r_1} + \frac{4\mathrm{G}^2 M_2 m_2}{c^2 r_1^2},$$

$$v_2^2 = v_{2\infty}^2 + \frac{2\mathrm{G}M_1}{r_2} + \frac{4\mathrm{G}^2 M_1 m_1}{c^2 r_2^2}.$$

Сравните с уравнением (1):

$$v^2 = v_\infty^2 + \frac{2\mathrm{G}M}{r} + \frac{4\mathrm{G}^2 M^2}{c^2 r^2}.$$

Чтобы убедиться, что полученные нами уравнения скорости в системе центра масс действительно правильные, сделаем проверку. Сила притяжения тел к условному центру тяготения, центру масс, должна быть такой же, как сила притяжения тел полученная ранее в относительной системе отсчёта.

Продифференцировав половину квадрата скорости тела m_1 по расстоянию, r_1, получим гравитационное ускорение в поле центра масс:

$$g_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_1}\left(\frac{v_1^2}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_1}\left(\frac{v_{1\infty}^2}{2} + \frac{\mathrm{G}M_2}{r_1} + \frac{2\mathrm{G}^2 M_2 m_2}{c^2 r_1^2}\right) = -\frac{\mathrm{G}M_2}{r_1^2} - \frac{4\mathrm{G}^2 M_2 m_2}{c^2 r_1^3}.$$

Сделав замену $M_2 = \frac{m_2^3}{M^2}$ и $r_1 = r\frac{m_2}{M}$, получим:

$$g_2 = -\frac{\mathrm{G}m_2}{r^2} - \frac{4\mathrm{G}^2 M m_2}{c^2 r^3} = -\frac{\mathrm{G}m_2}{r^2}\left(1 + \frac{4\mathrm{G}M}{c^2 r}\right).$$

И умножив ускорение на массу тела, получим силу притяжения к центру тяготения:

$$F = g_2 m_1 = -\mathrm{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\left(1 + \frac{4\mathrm{G}M}{c^2 r}\right),$$

равную, как и ожидалось, силе притяжения тел в относительной системе отсчёта. Очевидно, что в силу симметрии то же самое получим и для тела m_2.

Другие статьи по теме:

[Гравитационное отклонение света]

[Гравитационное отклонение света 2]

[Гравитационное отклонение света 3]

[Гравитационное отклонение света 4]

[Близкодействие и задача двух тел]

[Метод равносильных масс в задаче трёх тел]

[Метод равносильных масс в задаче трёх тел. Дополнение]

[Метод равносильных масс в задаче трёх тел 2]

[Как измерить гравитационную постоянную]

[Неизвестная сторона всемирного тяготения]

[Динамическая составляющая тяготения]