ВСЕЛЕННАЯ. ПОСТФРИДМАНОВСКАЯ МОДЕЛЬ.

©2011 *В.М. Мясников*

Аннотация.

Данная статья является естественным продолжением статьи [1]. Постньютоновский закон тяготения позволяет построить модель Вселенной исключительно в рамках ньютоновской физики. Вселенная, при этом, рассматривается как единое целое и в один и тот же “настоящий” момент времени, оставляя за скобками проблему дальнодействия, скорость распространения взаимодействий и т.п. Список возможностей такой модели впечатляет — гравитационная сфера как “противоположная точка” Вселенной, иерархия вещества во Вселенной, “разбегание” далеких галактик, закон Хаббла, космологическое красное смещение, гравитационный вакуум, “темная” энергия и ускоренное расширение Вселенной, принцип Маха и др. — причем все перечисленные явления определяются современным состоянием Вселенной и не требуют экзотических начальных условий типа ”большого взрыва”, “инфляции” и т.п. Серьезным недостатком такой модели является невозможность описания эволюции Вселенной. Предлагаемая статья восполняет этот "недостаток". В статье строится фридмановская модель Вселенной с учетом всех достоинств постньютоновской модели. Эту модель я назвал *постфридмановской*, и эта модель предлагает совершенно новый взгляд на "рождение" и эволюцию Вселенной. Дальнейшим развитием идей постньютоновской и постфридмановской моделей является "создание" парадигмы "Расширение Вселенной => локальная физика" (см.[3]).

Содержание:

1. Введение.

А.Эйнштейн в своей первой космологической модели (1917) для получения стационарных решений был вынужден ввести в свои уравнения «космологический» член (космологическую постоянную Λ). А.А.Фридман показал (1922), что и с учетом космологического члена, т.е. при $\Lambda \neq 0$ (как и при $\Lambda = 0$), уравнения Эйнштейна имеют нестационарные решения. Наличие космологической постоянной, отличной от нуля, интерпретируется как существование во Вселенной сил отталкивания, которые и уравновешивают гравитационные силы в модели Эйнштейна. В нашей постньютоновской модели (см. [1]) введение гравитационной сферы Вселенной также приводит к появлению сил отталкивания, и это позволяет по новому подойти к динамике Вселенной и к проблеме космологической постоянной. Я полагаю, что и в нашей модели однородной и изотропной Вселенной, с учетом влияния гравитационной сферы, Вселенная описывается уравнениями Эйнштейна (Фридмана). Уравнения Фридмана с учетом космологической постоянной записываются так (см. Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков, Строение и эволюция Вселенной. “Наука", М.,1975, гл. 2, 4):

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}a(\rho + \frac{3P}{c^2} - 2\rho_\Lambda)\\&\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}a^2(\rho + \rho_\Lambda) = -k\frac{c^2}{2}\\&\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + \frac{P}{c^2})\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Здесь $a = a(t)$ — т.н. масштабный множитель, зависящий только от времени, его называют радиусом кривизны, ρ — плотность и ρ_Λ — «космологическая» плотность (константа), связанная с космологической постоянной соотношением $\rho_\Lambda = \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}$

Ввести притяжение гравитационной сферы Вселенной в уравнения Фридмана можно «по аналогии». Известно, что в однородной и изотропной модели достаточно проследить судьбу произвольной сферы радиуса r и затем, ввиду произвольности r, распространить выводы на всю Вселенную. На языке уравнений это означает, что ньютоновское уравнение движения частицы на поверхности сферы радиуса r совпадает с первым уравнением Фридмана (в простейшем случае $P = 0$. Известный английский ученый Д.Шама (D.W.Sciama) назывет это *теоремой Милна–Мак-Кри*, см. Д.Шама, Современная космология. «Мир», М.,1973).

Уравнение движения частицы на поверхности сферы радиуса r с учетом притяжения гравитационной сферы Вселенной имеет вид (см. [1], (23))

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi G}{3}r\left(\rho - 2\rho_{kr}\right) \quad (2)$$

Здесь $\rho_{kr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$ — эйнштейновская критическая плотность.

Я также полагаю, что уравнение (2) совпадает с первым уравнением (1) (при замене r на a), что имеет место при условии

$$\frac{3P}{c^2} - 2\rho_\Lambda = -2\rho_{kr} \quad (3)$$

Имеются три возможности:

$$\text{I.}\quad P = 0,\quad \rho_\Lambda = \rho_{kr} = const\,. \quad (4)$$

$$\text{II.}\quad \rho_\Lambda = const \neq 0,\quad P = -\frac{2}{3}c^2(\rho_{kr} - \rho_\Lambda) \quad (5)$$

$$\text{III.}\quad \rho_\Lambda = 0,\quad P = -\frac{2}{3}c^2\rho_{kr} \quad (6)$$

Обзор решений уравнений Фридмана для первых двух случаев сделан в [2] гл. VII. Случай III, как мне представляется, наиболее адекватно описывает нашу Вселенную, именно в этом случае модель Вселенной я назвал *постфридмановской моделью.*

2. Предварительные решения

Перепишем условия (6)

$$\rho_\Lambda = 0,\quad P = -\frac{2}{3}c^2\rho_{kr}\ ,$$

т.е. полагаем, что в уравнениях Фридмана (Эйнштейна) космологическая постоянная равна нулю, а давление отрицательно. Отрицательное давление в нашей постньютоновской модели объясняется воздействием гравитационной сферы Вселенной, или, что то же самое, наличием гравитационного вакуума. Из этих условий с учетом [1] (26) имеем

$$\rho_{vak} = \frac{3P}{c^2} \tag{7}$$

Это равенство естественно рассматривать как уравнение состояния гравитационного вакуума. Отметим. что уравнение состояния вакуума (7) имеет место в любой момент эволюции Вселенной.

Итак, с учетом вышесказанного уравнения Фридмана (1) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} a(\rho - 2\rho_{kr}) \\ &\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} a^2 \rho = -k\frac{c^2}{2} \\ &\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho - \frac{2}{3}\rho_{kr}) \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Решаем уравнения (8) методом, который мы использовали в [5]. Введем переменные

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Omega = \frac{\rho}{\rho_{kr}} \quad . \tag{9}$$

Первую в дальнейшем именуем «параметр Хаббла», вторую — относительная плотность. Уравнения Фридмана (8) преобразуются к виду:

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} H^2 \Omega \tag{10}$$

$$(aH)^2 (1 - \Omega) = -kc^2 . \tag{11}$$

$$. \quad \dot{\Omega} = H(1 - \Omega)(2 - \Omega) \tag{12}$$

Рассматривая Ω как независимый параметр, находим интересующие нас величины как функции этого параметра. При этом полагаем, что параметр Ω принимает любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Пока мы не будем выяснять, какой смысл можно придать отрицательным значениям параметра Ω.

Из (10) и (12) получаем

$$\frac{dH}{d\Omega} = -\frac{H\Omega}{2(\Omega - 1)(\Omega - 2)} .$$

или

$$\frac{dH}{H} = \left(\frac{1}{2(\Omega - 1)} - \frac{1}{\Omega - 2} \right) d\Omega$$

Интегрируя, находим

$$H = \hat{H} \frac{\sqrt{|\Omega - 1|}}{|\Omega - 2|} \quad , \tag{13}$$

где $\hat{H}$ — постоянная интегрирования. Из (9) и (12) получаем

$$\frac{da}{d\Omega} = \frac{a}{(\Omega - 1)(\Omega - 2)}$$

или, интегрируя,

$$a = A\left|\frac{\Omega-2}{\Omega-1}\right|. \qquad (14)$$

Далее подставляем (13) и (14) в (11)

$$(A\hat{H})^2\,\mathrm{sgn}(1-\Omega) = -kc^2 .$$

откуда находим

$$A\hat{H} = c . \qquad (15)$$

$$\mathrm{sgn}(1-\Omega) = -k \quad (k \neq 0) \qquad (16)$$

Мы не рассматриваем здесь случай k = 0, т.к. рассмотрели его в [5]. Обращаем внимание, что здесь случай k = 0, т.е. Ω = 1, соответствует бесконечному радиусу кривизны (см. (14)), т.е. кривизна пространства в этом случае равна нулю, в отличие от соответствующего случая в космологической модели Фридмана [5].

Из (16) заключаем

$$\begin{array}{lll} \Omega < 1 & \Leftrightarrow & k = -1 \\ \Omega > 1 & \Leftrightarrow & k = +1 \end{array}.$$

Найдем также плотность как функцию параметра Ω (см. (9))

$$\rho = \Omega\rho_{kr} = \Omega\frac{3H^2}{8\pi G} = \Omega\frac{3\hat{H}^2\left|\Omega-1\right|}{8\pi G(\Omega-2)^2} = \rho_0\frac{\Omega\left|\Omega-1\right|}{(\Omega-2)^2} \ ,. \qquad (17)$$

или относительную плотность

$$\vartheta = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\Omega\left|\Omega-1\right|}{(\Omega-2)^2} \ ,$$

где введено обозначение

$$\rho_0 = \frac{3\hat{H}^2}{8\pi G} \ .$$

Найдем, наконец, время из (12) и (13)

$$\dot{\Omega} = H(\Omega-1)(\Omega-2) = \hat{H}\frac{\sqrt{\left|\Omega-1\right|}}{\left|\Omega-2\right|}(\Omega-1)(\Omega-2) = \hat{H}(\Omega-1)\sqrt{\left|\Omega-1\right|}\,\mathrm{sgn}(\Omega-2) \ ,$$

или

$$dt = \frac{1}{\hat{H}}(1-\Omega)^{-3/2}d\Omega\,, \quad \Omega < 1 \ ,. \qquad (18)$$

$$\left.\begin{array}{l} dt = -\dfrac{1}{\hat{H}}(\Omega-1)^{-3/2}d\Omega\,, \quad 1 < \Omega < 2 \\ dt = \dfrac{1}{\hat{H}}(\Omega-1)^{-3/2}d\Omega\,, \quad \Omega > 2 \end{array}\right\} . \qquad (19)$$

(18) интегрируем, выбирая за начало отсчета времени момент, соответствующий $\Omega = -\infty$, т.е.

$$t = \frac{1}{\hat{H}}\int_{-\infty}^{\Omega}(1-\Omega)^{-3/2}d\Omega = \frac{2}{\hat{H}}\frac{1}{\sqrt{1-\Omega}}\,, \quad \Omega < 1 \ ,$$

(19) интегрируем, выбирая сначала начало отсчета времени в момент, соответствующий $\Omega = 2$, т.е.

$$t = -\frac{1}{\hat{H}} \int_{2}^{\Omega} (\Omega - 1)^{-3/2} d\Omega = \frac{2}{\hat{H}} \left(\frac{1}{\sqrt{\Omega - 1}} - 1 \right), \quad 1 < \Omega < 2 .$$

$$t = \frac{1}{\hat{H}} \int_{2}^{\Omega} (\Omega - 1)^{-3/2} d\Omega = \frac{2}{\hat{H}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\Omega - 1}} \right), \quad \Omega > 2 .$$

Имея в виду, что для случая $\Omega > 2$ время конечно, можно, изменив направление времени во втором случае ($\Omega > 2$) и выбирая за начало отсчета момент времени, соответствующий $\Omega = +\infty$, а также учитывая, что время меняется непрерывно при переходе через точку $\Omega = 2$, получить единое выражение для времени

$$t = \frac{2}{\hat{H}} \frac{1}{\sqrt{\Omega - 1}}, \quad \Omega > 1 . \tag{20}$$

Обзор решений уравнений (8) см. в [2] гл. VIII. Случай $\Omega > 1$ в значительной степени совпадает с космологической моделью Фридмана, см. [5]. Та же проблема положительного направления времени (частично мы её уже рассмотрели при выводе (20)), сингулярность, которая находится в «серелине» ($\Omega = 2$) эволюции, характер изменения основных параметров эволюции (постоянной Хаббла, радиуса кривизны, плотности) и пр. Отличие в том, что кривизна пространства положительна ($k = +1$) для всех $\Omega > 1$. Мы здесь не будем рассматривать этот случай.

Значительно больший интерес, с нашей точки зрения, представляет случай $\Omega < 1$. Как известно, современные оценки параметра Ω дают значения меньшие единицы. Хотя эти оценки еще никак нельзя считать окончательными, мы положим в основу нашей модели именно этот случай.

3. Постфридмановская Вселенная. Расширение.

Итак, $\boldsymbol{\Omega < 1, k = -1}$.

Везде далее индексом "нуль" будем обозначать настоящий момент эволюции. Выпишем еще раз основные параметры Вселенной. Из (13), рассматриваемой в настоящий момент, находим постоянную интегрирования $\hat{H}$

$$\hat{H} = H_0 \frac{2 - \Omega_0}{\sqrt{1 - \Omega_0}} \tag{21}$$

и, подставляя в (13), получаем

$$H = H_0 \frac{2 - \Omega_0}{\sqrt{1 - \Omega_0}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \Omega}}{2 - \Omega} . \tag{22}$$

Постоянную A в (14) находим из условия (15) и значения (21)

$$A = \frac{c}{\hat{H}} = \frac{c}{H_0} \cdot \frac{\sqrt{1 - \Omega_0}}{2 - \Omega_0} ,$$

и тогда радиус кривизны

$$a = \frac{c}{H_0} \cdot \frac{\sqrt{1 - \Omega_0}}{2 - \Omega_0} \cdot \frac{2 - \Omega}{1 - \Omega} . \tag{23}$$

Плотность (см. (17)) выражается как

$$\rho = \Omega \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \cdot \frac{(2 - \Omega_0)^2}{1 - \Omega_0} \cdot \frac{\Omega(1 - \Omega)}{(2 - \Omega)^2}$$

или

$$\rho = \rho_{kr,0}\frac{(2-\Omega_0)^2}{1-\Omega_0}\cdot\frac{\Omega(1-\Omega)}{(2-\Omega)^2}\ , \tag{24}$$

где

$$\rho_{kr,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi\gamma}$$

— критическая плотность в настоящее время.

Время находим, интегрируя (18) и выбирая за начало отсчета настоящий момент (и обозначая время τ)

$$\tau = \frac{1}{\hat{H}}\int_{\Omega_0}^{\Omega}(1-\Omega)^{-3/2}d\Omega = \frac{2}{\hat{H}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\Omega}} - \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_0}}\right], \tag{25}$$

где $\hat{H}$ — значение, определенное в (21). Время τ назовем космологическим временем, а момент эволюции Вселенной, соответствующий времени τ, будем называть эпохой τ.

Обозначим

$$T = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_0}} + \frac{1}{2}\hat{H}\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_0}}\left[1 + \frac{1}{2}H_0(2-\Omega_0)\tau\right], \tag{26}$$

откуда

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{2}\hat{H} = \frac{1}{2}H_0\frac{2-\Omega_0}{\sqrt{1-\Omega_0}}\ . \tag{27}$$

Из (25) находим также

$$T = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega}}, \quad T_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_0}}\ . \tag{28}$$

Далее из (23) с учетом (28) находим

$$a = \frac{c}{\hat{H}}\left(1 + \frac{1}{1-\Omega}\right) = \frac{c}{\hat{H}}(1+T^2)\ ,$$

откуда, дифференцируя по τ и учитывая (27), имеем

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{c}{\hat{H}}2T\frac{dT}{d\tau} = \frac{c}{\hat{H}}2T\cdot\frac{1}{2}\hat{H} = cT$$

или

$$da = cTd\tau\ . \tag{29}$$

В каждой эпохе τ введем "собственное" время t следующим соотношением

$$dt = \alpha T d\tau\ , \tag{30}$$

тогда (29) перепишется

$$da = \frac{c}{\alpha}dt\ . \tag{31}$$

Здесь α — постоянный множитель, который мы определим ниже.

Полагаем, что космологическое время τ — равномерно, т.е. $d\tau$ не меняется с эволюцией и, следовательно,

$$d\tau = \frac{dt}{\alpha T} = const\ .$$

Иначе говоря, для любых двух эпох τ_1 и τ_2, соответствующих значениям параметра Ω_1 и Ω_2,

$$\frac{dt_1}{\alpha T_1} = \frac{dt_2}{\alpha T_2}\ ,.$$

в частности

$$\frac{dt_0}{\alpha T_0} = \frac{dt}{\alpha T} ,$$

откуда (см. (26))

$$. dt_0 = \frac{T_0}{T} dt = \left[1 + \frac{1}{2} H_0 (2 - \Omega_0) \tau \right]^{-1} dt .$$

Или, обозначая

$$S = \frac{T_0}{T} = \frac{\sqrt{1-\Omega}}{\sqrt{1-\Omega_0}} = \left[1 + \frac{1}{2} H_0 (2 - \Omega_0) \tau \right]^{-1} , \qquad (32)$$

получаем

$$dt_0 = S \cdot dt . \qquad (33)$$

т.е. время "расширяется" по мере эволюции Вселенной. Действительно, S убывает с эволюцией, а в современную эпоху $S = 1$, см. (32), поэтому в будущем $S < 1$, следовательно $dt > dt_0$, в прошлом — $S > 1$ и $dt < dt_0$. Таким образом, видим, что масштаб времени в любую эпоху по сравнению с космологическим временем меняется. Подчеркнем, что речь идет не о произвольности выбора единиц времени, а о соотношении единиц времени. Произвольно можно выбрать единицу времени только у одного из времен, t или τ .

Постоянную α выберем так, чтобы в современную эпоху масштабный множитель в (30) равнялся единице, т.е.

$$dt_0 = d\tau , \qquad (34)$$

или

$$\alpha T_0 = 1 , \quad \alpha = \frac{1}{T_0} = \sqrt{1-\Omega_0} .$$

Тогда (30) перепишется

$$dt = \sqrt{1-\Omega_0}\, T dt_0 = \frac{1}{S} dt_0 , \qquad (35)$$

а (31) — соответственно

$$da = \frac{c}{\sqrt{1-\Omega_0}} dt . \qquad (36)$$

Введем новую постоянную

$$c' = \frac{c}{\sqrt{1-\Omega_0}} ,$$

и тогда (36) перепишется

$$da = c' dt . \qquad (37)$$

Перепишем также (23)

$$a = \frac{c'}{H_0} \cdot \frac{1-\Omega_0}{2-\Omega_0} \cdot \frac{2-\Omega}{1-\Omega} . \qquad (38)$$

Введение новой константы c' , разумеется, не означает введения «новой» скорости света, новая константа c' означает всего лишь, что мы изменили масштаб времени, не изменяя при этом масштаб длины. Можно было бы поступить и иначе, а именно одновременно с изменением масштаба времени изменить масштаб длины, т.е. в (36) ввести длину $da' = \sqrt{1-\Omega_0}\, da$ и тогда (36) записать в виде

$$da' = c dt$$

и, соотвественно, переписать (23)

$$a' = \frac{c}{H_0} \cdot \frac{1-\Omega_0}{2-\Omega_0} \cdot \frac{2-\Omega}{1-\Omega}.$$

что, очевидно, то же самое. Учитывая вышесказанное, в дальнейшем скорость света в (37) и в (38) (или, если угодно, радиус кривизны в двух последних формулах) будем обозначать без штриха (старое обозначение нам больше не понадобится), т.е.

$$da = c \cdot dt \tag{39}$$

$$a = \frac{c}{H_0} \cdot \frac{1-\Omega_0}{2-\Omega_0} \cdot \frac{2-\Omega}{1-\Omega}. \tag{40}$$

da в (39), так же как и dt , следует интерпретировать как приращение радиуса кривизны (измеряемое) в эпоху τ . Из (39) имеем

$$\frac{da}{dt} = c. \tag{41}$$

Последнее соотношение позволяет интерпретировать скорость c как скорость расширения Вселенной (измеряемую) в эпоху τ . Мы видим, что эта скорость не зависит от того, в какую эпоху она рассматривается (измеряется). В этом смысле можно говорить, что скорость расширения Вселенной c постоянна. При этом, в принципе, нет никакой необходимости связывать скорость c со скоростью света, т.е. скоростью распространения электромагнитной волны (фотона). А то обстоятельство, что свет распространяется со скоростью c , требует специального объяснения в рамках рассматриваемой модели Вселенной. Мы это объяснение сделаем немного ниже, а сейчас вернемся к (39).

Рассматривая (39) в современную эпоху и учитывая (33), получаем

$$da_0 = cdt_0 = \tilde{n}Sdt = Sda,$$

т.е.

$$da_0 = S \cdot da \tag{42}$$

Таким образом, все расстояния растут по мере эволюции Вселенной. То обстоятельство, что в (42) da — приращение радиуса кривизны (а не произвольного расстояния) не принципиально, т.к. аналогичные рассуждения можно провести и для произвольного (строго говоря, произвольного *радиального* относительно точки наблюдения, см. [2] гл. X) расстояния dl . Действительно,

$$dl_0 = cdt_0 = cSdt = Sdl. \tag{43}$$

Что касается скорости распространения света, то, по-видимому, следует просто постулировать, что эта скорость равна c – скорости расширения Вселенной в любую эпоху. При этом рассуждения должны быть примерно следующие: никакая материальная частица в расширяющейся Вселенной не может двигаться относительно другой частицы быстрее, чем расширяется Вселенная (это означало бы, что частица «обгоняет» эволюцию, т.е. в конечном счете, самоё себя), т.е. любые скорости перемещения одной частицы относительно другой (в любой системе отсчета) не превосходят c . И только свет, который можно рассматривать как поток частиц с нулевой массой покоя (а также любые другие частицы с нулевой массой покоя) распространяются с наибольшей, возможной в расширяющейся Вселенной, скоростью. При этом, каждая электромагнитная волна (фотон) имеет характерные для этой волны длину и время, связанные таким же соотношением, что и для Вселенной (см. (39))

$$\Delta l = c\Delta t,$$

где $\Delta l = \lambda$ называют длиной волны, а Δt — периодом, или обратную периоду величину $\frac{1}{\Delta t} = \nu$ — частотой волны, т.е.

$$\lambda = c \cdot \frac{1}{\nu} \ . \tag{44}$$

Соотношение (44) имеет место в любую эпоху.

Мы полагаем, что последнее утверждение, вместе с некоторыми уже сформулированными выше, является частным случаем более общего принципа, который можно назвать «принципом относительности расширяющейся Вселенной» или «космологическим постулатом»,:

Все локальные законы физики одинаковы в любую эпоху расширения Вселенной, и в любом месте Вселенной.

Иначе говоря, никакими локальными измерениями невозможно установить эпоху, в которой эти измерения производятся.

Мы полагаем (см. [3], а также [2] гл. IX и XI), что принцип относительности Эйнштейна является следствием космологического постулата (если последний постулировать как первичный. Пока же, наоборот, наши выводы основываются на ОТО, в частности и на принципе относительности Эйнштейна).

Расширение Вселенной, которое проявляется в том, что все расстояния и промежутки времени «расширяются» (см. (43) и (33)), с учетом принципа относительности естественным и непринужденным образом объясняют космологическое красное смещение, которое не требует, вообще говоря, привлечения эффекта Доплера для своего объяснения. Действительно, параметр Z , характеризующий космологическое красное смещение, определяется

$$Z = \frac{\lambda_{nabl} - \lambda_{isp}}{\lambda_{isp}} \tag{45}$$

где λ_{nabl} — наблюдаемая длина волны, а λ_{isp} — испускаемая длина волны. Пусть λ_{nabl} — длина волны, испускаемой далекой галактикой в эпоху $-\tau$, и которую мы наблюдаем в настоящее время ($\tau = 0$). И тогда, в соответствии с (43),

$$\lambda_{nabl} = \lambda_0 = S(-\tau)\lambda_{isp}(-\tau) \ .$$

В соответствии с космологическим постулатом λ_{isp} одно и то же в любую эпоху, т.е.

$$\lambda_{isp}(-\tau) = \lambda_{isp}(0) = \lambda_{isp} \ ,$$

и тогда

$$Z = \frac{\lambda_{nabl} - \lambda_{isp}}{\lambda_{isp}} = \frac{S(-\tau)\lambda_{isp} - \lambda_{isp}}{\lambda_{isp}} = S(-\tau) - 1$$

или

$$S(-\tau) = Z + 1 \tag{46}$$

— известный космологический параметр.

4. Время в расширяющейся Вселенной.

Обсудим теперь вопрос о вычислении времени в расширяющейся Вселенной. Здесь, как нам представляется, основная проблема в четкой постановке вопроса: какое время вычисляется?

Поясним это на следующем примере. Пусть мы наблюдаем далекую галактику с красным смещением Z . Спрашивается, сколько времени прошло с момента испускания света до момента регистрации этого света нашими приборами. На этот вопрос имеется, по крайней мере, два (или даже три) ответа.

Предположим, что свет был испущен в эпоху $-\tau$. Тогда из (32) можно вычислить космологическое время τ :

$$S(-\tau)=\left[1-H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})\tau\right]^{-1}=Z+1\ ,$$

откуда

$$\tau=\frac{1}{H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})}\cdot\frac{Z}{Z+1}\ .$$

Можно вычислить «современное» время, т.е. время t_0 , соответствующее современной эпохе. Это следует понимать так, что мы измеряем время распространения света от далекой галактики «из современной эпохи» с помощью неизменного современного эталона dt_0 . Но современный масштаб времени выбран так, что $dt_0 = d\tau$ (см. (34)), откуда очевидно

$$t_0=\tau=\frac{1}{H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})}\cdot\frac{Z}{Z+1}\ . \tag{47}$$

Можно вычислить t_0 и непосредственно, имея в виду (34) и (27),

$$dt_0=d\tau=\frac{2}{H_0}\frac{\sqrt{1-\Omega_0}}{2-\Omega_0}dT\ .$$

Интегрируя в промежутке $[T(-\tau),T]$, находим

$$t_0=\frac{2}{H_0}\frac{\sqrt{1-\Omega_0}}{2-\Omega_0}\big(T_0-T(-\tau)\big)=\frac{1}{H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})}\left(1-\frac{1}{S(-\tau)}\right)=\frac{1}{H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})}\cdot\frac{Z}{Z+1}\ .$$

Можно сказать, что время t_0 (как и τ) течет независимо от эволюции, поэтому время t_0 будем называть в дальнейшем *ньютоновским* временем, имея в виду ньютоновское: «Абсолютное, истинное математическое время само по себе и по своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью», и будем обозначать t_N .

Можно вычислить время, которое «прожил» тот фотон, который мы регистрируем. Этот фотон прожил последовательно все эпохи от $-\tau$ до 0, и в каждой эпохе время свое, а именно (см. (35) и (27))

$$dt=\sqrt{1-\Omega_0}Td\tau=\frac{1}{H_0}\frac{1-\Omega_0}{2-\Omega_0}2TdT\ .$$

Интегрируя по $[T(-\tau),T]$, находим

$$t=\frac{1}{H_0}\frac{1-\Omega_0}{2-\Omega_0}(T_0^2-T^2)=\frac{1}{H_0(2-\Omega_0)}\left(1-\frac{1}{S^2(-\tau)}\right)$$

т.е.

$$t_E=\frac{1}{H_0(2-\Omega_0)}\left(1-\frac{1}{S^2}\right)=\frac{1}{H_0(2-\Omega_0)}\cdot\frac{(1+Z)^2-1}{(1+Z)^2}\ . \tag{48}$$

Время t_E , в отличие от ньютоновского , назовем *эйнштейновским* (и будем обозначать t_E). Эти названия (ньютоновское и эйнштейновское), которые пока введены нами для удобства речи, имеют и более глубокий смысл. Как мы уже говорили во введении, основная цель нашей работы показать, что локальная физика полностью определяется эволюцией Вселенной. Но тогда время t_N , как независимое от эволюции, не зависит и от локальных условий (распределения материи, движения и пр.), т.е. совпадает с ньютоновским представлением о времени. И напротив, время t_E , как зависящее от эволюции, зависит и от локальных физических условий, что соответствует эйнштейновскому представлению о времени.

Заметим, что при малых Z (Z << 1) ньютоновское и эйнштейновское время совпадают

$$t_N = t_E = \frac{Z}{H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})}, \quad (Z \ll 1) \tag{49}$$

тогда как при больших Z разница существенна. Так ньютоновский и эйнштейновский возраст Вселенной ($Z \to +\infty$)

$$t_{N,\infty} = \frac{1}{H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})}, \tag{50}$$

$$t_{E,\infty} = \frac{1}{2H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})} \tag{51}$$

различаются в два раза.

Определяя выше ньютоновское и эйнштейновское время как время, прошедшее с момента излучения света до момента настоящего, мы фактически выбирали за начало отсчета времени эпоху $-\tau$. Поскольку в нашей модели за начало отсчета времени мы везде выбираем настоящий момент ($\tau = 0$), а направление времени считаем от прошлого к будущему, перепишем (47) и (48):

$$t_N = \frac{1}{H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})}\left(\frac{1}{S}-1\right) \tag{52}$$

$$t_E = \frac{1}{2H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})}\left(\frac{1}{S^2}-1\right) \tag{53}$$

— соответственно, ньютоновское и эйнштейновское время.

5. Вселенная, вид с Земли (из современной эпохи).

Выше мы сформулировали принцип относительности расширяющейся Вселенной, который гласит, что все законы физики имеют одинаковый вид в любую эпоху. В свете этого принципа интересно посмотреть, какой представляется расширяющаяся Вселенная из современной эпохи ($\Omega = \Omega_0$, $\tau = 0$). При этом наблюдатель (мы с вами, уважаемый читатель), живущий в современную эпоху, имеет в своем распоряжении только ньютоновское, или, в лучшем случае, эйнштейновское представление о времени, и потому он оценивает эволюцию Вселенной в этом времени. Напомним, что в малой окрестности (по времени) современной эпохи ньютоновское и эйнштейновское время практически совпадают, но с удалением от современной эпохи, в прошлое или будущее, разница существенна и приводит к совершенно различным моделям Вселенной.

Рассмотрим сначала модель Вселенной в эйнштейновском времени (напомним еще раз, модель, как она представляется нам из современной эпохи). Из (39)

$$da = c \cdot dt ,$$

интегрируя по [0, t], получаем

$$a = ct + a_0 , \tag{54}$$

где t — эйнштейновское время (53) (индекс мы пока опускаем), а

$$a_0 = \frac{c}{H_0}$$

находим из (40) при $\Omega = \Omega_0$.

Параметр Хаббла H определен в (9) как

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{da}{d\tau} \ .$$

По аналогии определим «параметр Хаббла» и в нашей модели

$$\tilde{H} = \frac{1}{a} \cdot \frac{da}{dt} \ .$$

Тогда из (54)

$$\tilde{H} = \frac{c}{ct + a_0} = \frac{c}{a}$$

С другой стороны, имея в виду (см. (35)), что $dt = \frac{1}{S} d\tau$,

$$\tilde{H} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = S\frac{1}{a}\frac{da}{d\tau} = SH \ . \tag{55}$$

Отметим, что в современную эпоху ($\tau = 0$, $S = 1$)

$$\tilde{H}_0 = H_0 \ . \tag{56}$$

Найдем далее плотность (см. (9) и (55))

$$\rho = \Omega \frac{3H^2}{8\pi G} = \Omega \frac{3\tilde{H}^2}{8\pi G} \cdot \frac{1}{S^2} \ . \tag{57}$$

Выразим также Ω через Ω_0 из (32)

$$\Omega = \Omega_0 S^2 + (1 - S^2)$$

и подставляя в (57), получим

$$\rho = \Omega_0 \frac{3\tilde{H}^2}{8\pi G} + \frac{3\tilde{H}^2}{8\pi G}\left(\frac{1}{S^2} - 1\right) ,$$

или, подставляя из (53)

$$\frac{1}{S^2} - 1 = H_0(2 - \Omega_0)t$$

и учитывая (56),

$$\rho = \frac{3\tilde{H}^2}{8\pi G}\left(\Omega_0 + \tilde{H}_0(2 - \Omega_0)t\right) .$$

Таким образом, получаем модель Вселенной, в которой основные параметры получены как функции эйнштейновского времени:

$$k = -1, \quad \tilde{H} = \frac{c}{ct + \frac{c}{\tilde{H}_0}}, \quad a = ct + \frac{c}{\tilde{H}_0}, \quad \rho = \frac{3\tilde{H}^2}{8\pi G}\left(\Omega_0 + \tilde{H}(2 - \Omega_0)t\right) . \tag{58}$$

Любопытно отметить, что если модель (58) взять как исходную, и при этом "не знать", что $\Omega_0 < 1$ и что время t не имеет смысла при $\Omega_0 = 2$, то формально, подставляя в (58) $\Omega_0 = 2$, получаем модель Эйнштейна (см. [2] гл. VII, модель III–а):

$$a = ct + a_0 \ , \quad \tilde{H} = \frac{c}{ct + a_0} \ , \quad \rho = \frac{3c^2}{4\pi G a^2} \ ,$$

в которой $k = +1$ (!).

Однако, “мы-то знаем”, что так делать нельзя и поступим иначе, а именно рассмотрим лишь малую окрестность (по времени) современной эпохи, т.е. при $\left|\tilde{H}_0(2-\Omega_0)t\right| \ll \Omega_0$. Тогда, отбрасывая малую величину в выражении для плотности (58), получаем

$$a = ct + \frac{c}{\tilde{H}_0}, \quad \tilde{H} = \frac{c}{ct + \frac{c}{\tilde{H}_0}}, \quad \rho = \frac{\Omega_0}{2} \cdot \frac{3\tilde{H}^2}{4\pi G}, \tag{59}$$

т.е. «почти эйнштейновскую» Вселенную (в смысле модели III–а, [2] гл. VII). При этом, видимо, безразлично, какой знак брать у кривизны ($k = +1$, $k = -1$ или даже $k = 0$), т.к. выбирая малую окрестность (по времени) современной эпохи, мы тем самым выбираем малую окрестность точки наблюдения (Земли, Солнца или Галактики) в пространстве, в которой кривизна еще не проявляется. При этом следует иметь в виду, что эта «малая» окрестность в пространстве является малой в мегамасштабах и отнюдь не мала в «астрономических» масштабах. И при наших современных наблюдательных возможностях мы практически не выходим за эту «малую» окрестность.

Итак, параметры Вселенной (59) являются «почти» эйнштейновскими (в смысле модели III–а [2] гл. VII) и тем ближе к эйнштейновским, чем меньше окрестность современной эпохи (по времени) мы берем. В частности, в современную эпоху ($\tau = 0$) эти параметры должны совпадать с эйнштейновскими, т.е.

$$a_0 = \frac{c}{H_0}, \quad H_0 = \frac{c}{a_0}, \quad \rho_0 = \frac{\Omega_0}{2} \cdot \frac{3H_0^2}{4\pi G}.$$

Но в эйнштейновской модели III-а плотность равна удвоенной критической плотности (см. [2] гл. VII, (13)), т.е.

$$\rho_0 = \frac{\Omega_0}{2} \cdot \frac{3H_0^2}{4\pi G} = 2\rho_{kr,0} = \frac{3\bar{H}_0^2}{4\pi G}, \tag{60}$$

где мы ввели константу $\bar{H}_0$, чтобы записать критическую плотность в соответствии с её определением в (2). Из (60) находим

$$\bar{H}_0 = H_0\sqrt{\frac{\Omega_0}{2}}. \tag{61}$$

Мы полагаем, что именно константа $\bar{H}_0$ является постоянной Хаббла в том первоначальном смысле, какой ей придавал сам Э.Хаббл, т.е. как коэффициент пропорциональности в законе Хаббла

$$r\bar{H}_0 = cZ, \tag{62}$$

и которая, как мы считаем, равна $55{,}645\frac{km/s}{Mps}$ (см. [2] гл.V (17)).

Действительно, пусть мы наблюдаем далекую галактику с красным смещением Z. Расстояние до этой галактики равно

$$r = -ct,$$

где t — эйнштейновское время (53), (здесь отрицательное, т.к. отсчет времени ведется в прошлое). Подставляя (53) и учитывая (46), находим

$$r = \frac{c}{2H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})}\left(1-\frac{1}{S^2}\right) = \frac{c}{2H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})} \cdot \frac{(1+Z)^2-1}{(1+Z)^2}$$

или, полагая $Z << 1$,

$$r = \frac{c}{H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})} Z \qquad (Z << 1)$$

Поскольку расстояние до галактики и её красное смещение связаны законом Хаббла (62), постоянная Хаббла равна

$$\bar{H}_0 = H_0(1-\frac{\Omega_0}{2}) \quad . \tag{63}$$

Разумеется, априори ниоткуда не следует, что постоянная $\bar{H}_0$ в (61) и в (63) одна и та же, но дело даже не в этом. Гораздо важнее то обстоятельство, что коэффициент пропорциональности в законе Хаббла (постоянная Хаббла), вычисленный двумя более или менее независимыми путями, не совпадает со значением параметра Хаббла $\tilde{H}(t)$ или *H(t)* в современную эпоху (τ = 0).

С другой стороны, представляется не бессмысленным считать, что это одна и та же константа, т.е.

$$\bar{H}_0 = H_0\sqrt{\frac{\Omega_0}{2}} = H_0(1-\frac{\Omega_0}{2}) \ .$$

Последнее дает возможность найти значение относительной плотности в современную эпоху

$$\Omega_0 = 3-\sqrt{5} \approx 0,76 \tag{64}$$

Стоит отметить удивительный факт, что параметр Хаббла и постоянная Хаббла оказываются связанными известным отношением «золотого сечения»

$$\frac{\bar{H}_0}{H_0} = 1-\frac{\Omega_0}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \ . \tag{!!!}$$

Следующим замечанием мы хотим привлечь внимание прежде всего астрономов, занимающихся измерением постоянной Хаббла. Как следует из нашей модели, постоянная Хаббла, определяемая как коэффициент пропорциональности в законе Хаббла, и величина, которую мы называем параметром Хаббла, $H = \dot{a}/a$ (см. (9)), вычисленная в современную эпоху, — это *разные* величины и связаны они соотношением «золотого сечения». Если принять, что относительная плотность в современную эпоху $\Omega_0 = 0,76$ (см. (64)), то параметр Хаббла в 1,6 раза больше постоянной Хаббла (а в «почти» квазиевклидовой модели даже в 2 раза, см. (70) при $t = 0$).

В настоящее время (середина 80-х прошлого века, когда был написан данный текст) наиболее известны два «конкурирующих» измеренных значения постоянной Хаббла: измерения Г.А.Таммана и А.Сендиджа *H* = 55±7 (*Г.А.Тамман*, Постоянная Хаббла и параметр ускорения, в кн. Космология. Теория и наблюдения. "Мир", М., 1978, стр. 70, см. также Природа № 6, 1976, стр. 146 со ссылкой на *А.Сендидж* и *Дж.Тамман* "Sky and Telescope", 1975, v. 40, № 2, p.93, где приводится более «определенное» значение *H* = 55,5) и Жерара Вокулера *H* = 100±10 (*Жерар Вокулер*, Внегалактическая шкала расстояний и постоянная Хаббла, в кн. Проблемы физики: классика и современность. "Мир", М., 1983, стр. 168). Не может ли оказаться, что эти измерения подтверждают друг друга?

Действительно, эти измерения хорошо согласуются, если Г,А,Тамман и А.Сендидж измерили постоянную Хаббла, а Ж.Вокулер — параметр Хаббла. Если, по Тамману и Сендиджу, постоянная Хаббла $\bar{H}_0 = 55 \pm 7$, то из (!!!) следует, что параметр Хаббла H_0 = 89±11 , и значения $H_0 \in [90,100]$ покрываются измерениями

Ж.Вокулера. Кроме того, имеются и более поздние измерения $H = 95 \pm 4$ (Природа № 6, 1981, стр. 109, со ссылкой на Astrophysical Journal, 1980, v. 239, № 1, part 1, p. 12 – 37), целиком лежащие в этом интервале.

Если наши предположения соответствуют действительности, то значение постоянной Хаббла $H = 55{,}5$ (или, как мы предлагаем, $H = 55{,}645$, см. [2] гл.V (17)) можно считать достаточно хорошо подтвержденным измерениями, и кроме того, это можно рассматривать как хорошее подтверждение нашей модели Вселенной.

Сегодня, для единообразия расчетов, предлагается значение постоянной Хаббла $H = 75\,\frac{km\,/\,s}{Mps}$. Полагаю, что это значение выбрано просто как среднее арифметическое измеренных значений Г,А,Таммана-А.Сендиджа и Ж.Вокулера.

Посмотрим теперь, какой представляется из современной эпохи Вселенная в ньютоновском времени. Ньютоновское время (52) перепишем, уже используя постоянную Хаббла $\bar{H}_0$ (и также опуская индекс),

$$t = \frac{1}{\bar{H}_0}\left(\frac{1}{S} - 1\right),$$

откуда находим

$$S = \frac{1}{1 + \bar{H}_0 t}\ . \tag{65}$$

Выразим теперь параметры Вселенной как функции ньютоновского времени:

Радиус кривизны (40) (см. также (63) и (32))

$$a = \frac{c}{2\bar{H}_0}(1 - \Omega_0)\frac{2 - \Omega}{1 - \Omega} = \frac{c}{2\bar{H}_0}(1 - \Omega_0 + \frac{1}{S^2})$$

или, с учетом (65),

$$a = \frac{c}{2\bar{H}_0}(1 - \Omega_0) + \frac{c}{2\bar{H}_0}(1 + \bar{H}_0 t)^2\ . \tag{66}$$

Параметр Хаббла, учитывая, что $dt = d\tau$ (см. (34)),

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = 2\bar{H}_0\,\frac{1 + \bar{H}_0 t}{1 - \Omega_0 + (1 + \bar{H}_0 t)^2}\ . \tag{67}$$

Плотность (см. (32))

$$\rho = \Omega\frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3H^2}{8\pi G} - (1 - \Omega_0)\frac{3H^2}{8\pi G}S^2\ . \tag{68}$$

И в этом случае так же, как и для случая эйнштейновского времени, если параметры Вселенной (66), (67) и (68) взять за исходные и «не зная», что это не имеет смысла, формально положить в современную эпоху $\Omega_0 = 1$, то получим

$$a = \frac{c}{2\bar{H}_0}(1 + \bar{H}_0 t)^2\ , \quad H = \frac{2\bar{H}_0}{(1 + \bar{H}_0 t)^2}\ , \quad \rho = \frac{3\bar{H}_0^2}{2\pi G(1 + \bar{H}_0 t)^2}\ ,$$

т.е. квазиевклидовую модель III–в (см. [2] гл. VII), если учесть, что при $\Omega_0 = 1$ $\bar{H}_0 = \frac{1}{2}H_0$, (см. (63).

Можно построить и «почти» квазиевклидовую модель (в смысле III–в) Вселенной в ньютоновском времени в достаточно малой окрестности (по времени) современной эпохи $\left|\bar{H}_0 t\right| \ll 1$, аналогично тому, как это сделано для модели а эйнштейновсом времени.

Для этого рассмотрим радиус кривизны в виде (см. (66))

$$a' = a - \frac{c}{2\bar{H}_0}(1-\Omega_0) = \frac{c}{2\bar{H}_0}(1+\bar{H}_0 t)^2 \ , \tag{69}$$

т.е. изменим начальное условие в зависимости радиуса кривизны от времени, не изменяя саму зависимость. Тогда параметр Хаббла

$$H' = \frac{1}{a'}\frac{da'}{dt} = \frac{2\bar{H}_0}{1+\bar{H}_0 t} \ . \tag{70}$$

Сравнивая с (67), находим

$$H = H'\frac{(1+\bar{H}_0 t)^2}{1-\Omega_0+(1+\bar{H}_0 t)^2} \ ,$$

что дает в окрестности современной эпохи $\left|\bar{H}_0 t\right| \ll 1$

$$H \approx H'\frac{1}{2-\Omega_0} \ .$$

Полагая также в малой окрестности современой эпохи $\Omega \approx \Omega_0$, находим плотность

$$\rho = \Omega\frac{3H^2}{8\pi G} \approx \frac{\Omega_0}{(2-\Omega_0)^2}\cdot\frac{3H'^2}{8\pi G} = \rho' \ . \tag{71}$$

Параметры (69), (70), (71) и определяют почти квазиевклидовую модель Вселенной в окрестности современной эпохи. При этом плотность в современную эпоху, вычисленная по (71), с учетом $H'_0 = 2H_0$ (см. (70))

$$\rho'_0 = \frac{\Omega_0}{(2-\Omega_0)^2}\cdot\frac{3H_0'^2}{8\pi G} = \frac{\Omega_0}{(2-\Omega_0)^2}\cdot\frac{3\bar{H}_0^2}{2\pi G}$$

очевидно должна совпадать с (60), т.е.

$$\frac{\Omega_0}{(2-\Omega_0)^2}\cdot\frac{3\bar{H}_0^2}{2\pi G} = \frac{3\bar{H}_0^2}{4\pi G} \ ,$$

что естественно снова приводит к

$$\Omega_0 = 3-\sqrt{5} \ .$$

6. Масса в расширяющейся Вселенной. Масса Вселенной.

Перейдем теперь к обсуждению наиболее деликатного вопроса в нашей модели — вопроса о плотности массы и о самой массе. Сразу же возникают два «грозных» вопроса: имеют ли смысл отрицательные значения параметра Ω (напомним, что мы рассматриваем $\Omega \in (-\infty,1)$), а следовательно и отрицательные плотности вещества, а если имеют, то какой? Почему с расширением Вселенной плотность вещества растет (вплоть до Ω = 2/3, см.[2], гл. VIII).

Прежде чем обсуждать эти вопросы, сделаем одно отступление. Плотность (24), нормированную постоянным коэффициентом,

$$\vartheta = \frac{1-\Omega_0}{\rho_{kr,0}(2-\Omega_0)^2}\cdot\rho = \frac{\Omega(1-\Omega)}{(2-\Omega)^2}$$

выразим как функцию радиуса кривизны (23), также нормированного постоянным коэффициентом,

$$\lambda = \frac{H_0}{c}\frac{2-\Omega_0}{\sqrt{1-\Omega_0}}\cdot a = \frac{2-\Omega}{1-\Omega}$$

т.е.

$$\vartheta(\lambda) = \frac{\lambda-2}{\lambda^2} \quad (\lambda > 1)$$

Современное значение радиуса кривизны с учетом (64)

$$\lambda_0 = \frac{2-\Omega_0}{1-\Omega_0} = 3+\sqrt{5} \approx 5$$

Для простоты будем считать $\lambda_0 = 5$.

Аналогично найдем зависимость плотности от радиуса кривизны для квазиевклидовой модели III–в (см. [2] гл.VII (19) и (20)), или, что то же самое, «почти» квазиевклидовой модели (см. (69), (71))

$$\vartheta_N = \frac{1}{\lambda}$$

и для эйнштейновской модели III–а (см. [2] гл.VII (14)), или «почти» эйнштейновской (см. (59))

$$\vartheta_E = \frac{1}{\lambda^2}$$

Для сравнения приведем также аналогичные зависимости в модели Фридмана для нулевого давления (см. [5], (22) и (24))

$$\vartheta_1 = \frac{1}{\lambda^3}$$

и максимального давления (см. [5], (26) и (28))

$$\vartheta_2 = \frac{1}{\lambda^4} \; .$$

Приведем, наконец, все эти зависимости к единичному значению в современную эпоху ($\lambda_0 = 5$), т.е.

$$\vartheta = \frac{25}{3}\frac{\lambda-2}{\lambda}, \quad \vartheta_N = \frac{5}{\lambda}, \quad \vartheta_E = \left(\frac{5}{\lambda}\right)^2, \quad \vartheta_1 = \left(\frac{5}{\lambda}\right)^3, \quad \vartheta_2 = \left(\frac{5}{\lambda}\right)^4$$

Последние представлены на рис. 1.

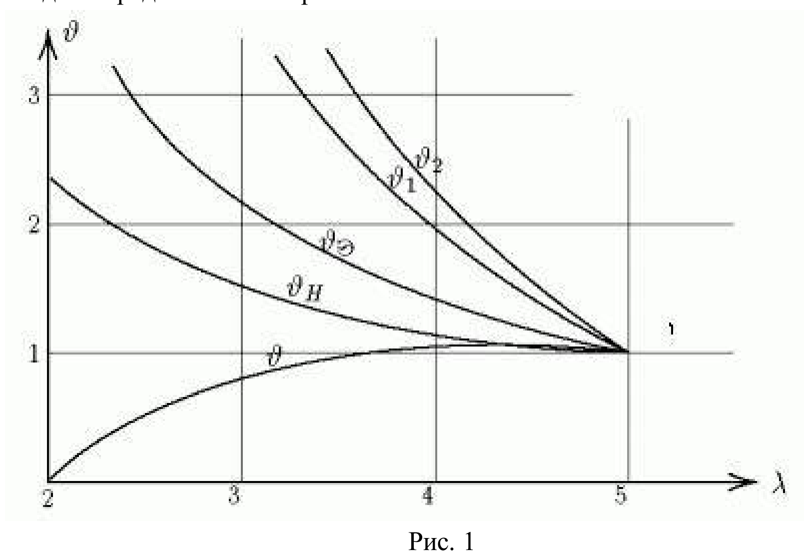

Рис. 1

Характер кривых на Рис. 1 поразительно напоминает кривые зависимости спектральной плотности энергии от длины волны в законе излучения Рэлея-Джинса (причем кривая ϑ_2 совпадает точно). Мы говорим здесь об этом не для того, чтобы подчеркнуть некую аналогию между этими зависимостями, а исключительно для того, чтобы подчеркнуть возможную аналогию в их интерпретации. Поясним, что мы имеем в виду. Закон Рэлея-Джинса, безукоризненно (в рамках классической физики) выведенный для средних и длинных волн, при экстраполяции его на короткие волны приводил к физически бессмысленному и противоречащему опыту выводу о бесконечной плотности энергии излучения. Этот вывод получил а истории физики название «ультрафиолетовая катастрофа».

Не делается ли и в космологии такая же методологическая ошибка? Зависимость средней плотности вещества Вселенной, полученная более или менее точно для «средних» значений радиуса кривизны (в малой окрестности (по времени) современной эпохи), экстраполируется вплоть до нулевых значений радиуса кривизны, что приводит к бесконечной кривизне пространства и бесконечной плотности — так называемому сингулярному состоянию Вселенной.

Не следует думать, что кривая для нашей модели (кривая ϑ) решает эту проблему (она, увы, далека от планковской кривой в законе излучения черного тела). Наоборот, эта кривая ставит новые вопросы (отрицательная плотность и др.), которых не было в других моделях.

Вернемся к нашим вопросам. Итак, отрицательная плотность, что это такое и может ли она в принципе существовать?

Во-первых, заметим, что у нас уже появлялась отрицательная плотность в уравнении Пуассона для гравитационного потенциала (см. [2], главу IV), от которой оказалось невозможно «отделаться». Более того, отрицательная плотность оказалась даже необходимой в ньютоновской модели Вселенной ([2], глава V) для введения гравитационного вакуума, и которую, в конечном счете, мы ввели в уравнения Фридмана (Эйнштейна), т.е. в рассматриваемую модель.

Во-вторых, отрицательная плотность, как правило, связывается с существованием тел (частиц), имеющих отрицательные массы. Но тел с отрицательной массой в доступной нам части Вселенной, по-видимому, нет. А может их потому и нет, что в современную эпоху плотность положительна? Можем ли мы с уверенностью утверждать, что их и не было? Более того, можем ли мы вообще быть уверенными, что отрицательная плотность связана с наличием каких-либо тел? Может быть, само появление тел во Вселенной (звезд, галактик, скоплений галактик и даже элементарных частиц) связано с эпохой, когда плотность вещества во Вселенной перешла нулевую отметку?

Если это так, то мы можем даже оценить время, когда это произошло. Из (32) при $\Omega = 0$ и (46) имеем

$$S = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_0}} = 1 + Z \ ,$$

откуда

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_0}} - 1$$

или при $\Omega_0 = 3-\sqrt{5}$ (см. (64)) $Z = 1{,}058$, что дает в ньютоновском времени (52) $t_N = 9\cdot 10^9$ лет (9 миллиардов лет), и в эйнштейновском времени (53) — $t_E = 6{,}7\cdot 10^9$ лет. Для сравнения приведем ньютоновский и эйнштейновский возраст Вселенной (см. (50) и (51))

$$t_{N,\infty} = 17{,}5\cdot 10^9\,\text{лет}, \quad t_{E,\infty} = 8{,}8\cdot 10^9\,\text{лет}$$

Полученные оценки возраста галактик, во всяком случае, не вступают в явное противоречие с современными наблюдательными данными, но противоречит современной теории эволюции звезд, по которой возраст старейших звезд оценивается в 12 – 13 миллиардов лет. Не касаясь пока квазаров и прочих объектов с красным смещением большим $Z = 1{,}058$ (некоторые соображения по этому вопросу см. ниже), заключаем, что отрицательная плотность не может быть безоговорочно отвергнута и требует физической интерпретации.

Рассмотрим теперь второй вопрос: почему в расширяющейся Вселенной плотность растет? Очевидно, это возможно в единственном случае, когда с эволюцией растет и масса (энергия). В принципе не исключен и другой вариант, если допустить, что с эволюцией изменяется гравитационная постоянная G. Но это допущение приводит к слишком большим трудностям. Придется пересмотреть всю модель, заново решать космологические уравнения, даже если допустить, что они остаются справедливыми в этом случае.

Поэтому мы рассмотрим более «простой» вариант и полагаем, что гравитационная постоянная не изменяется, и из этого выведем закон «расширения» массы. Пусть m, l и t — планковские масса, длина и время в эпоху τ и, соответственно, m_0 , l_0 и t_0 — в современную эпоху. Выражая гравитационную постоянную через планковскую массу, длину и время и учитывая, что гравитационная постоянная не изменяется с эволюцией, имеем

$$G = \frac{l^3}{mt^2} = \frac{l_0^3}{m_0 t_0^2} \tag{72}$$

Но с расширением Вселенной время и длина «расширяются» по закону (33) и (43), в том числе, разумеется, и планковские время и длина

$$t_0 = St\,, \quad l_0 = Sl\ .$$

Подставляя в (72), получаем

$$\frac{l^3}{mt^2} = \frac{(Sl)^3}{m_0 (St)^2}\ ,$$

или

$$m_0 = Sm\,. \tag{73}$$

Далее полагаем, что закон «расширения» массы столь же универсален, как и закон «расширения» времени и длины, т.е. (73) справедливо для любых масс m (а не только планковских).

Подчеркнем сразу, что «расширение» массы не означает рождения новых частиц, поэтому «расширение» массы не ставит под сомнение ни закон сохранения барионного заряда, ни электрического, ни других. Несколько сложней вопрос о законе сохранения энергии. Но заметим, что законы «расширения» массы, времени и длины не затрагивают вообще локальные законы сохранения, т.е. законы сохранения в ту или иную эпоху. Проблема возникает, когда приходится сравнивать энергию из разных эпох, при этом энергия, так же как и масса, «расширяется»

$$E_0 = S \cdot E\ . \tag{74}$$

Нарушается ли при этом закон сохраниеия энергии? Мы полагаем, что не нарушается. И объяснение тому такое же, как в специальной теории относительности, где при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой масса (энергия) также «растет» ($m \to m' = \dfrac{m}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$). Мы это объяснение сделаем позже, а сейчас заметим, что соотношение (74) позволяет интерпретировать космологическое красное смещение как энергетический эффект (ср. (45), (46))

$$\frac{E_{nabl} - E_{isp}}{E_{isp}} = \frac{S(-\tau)E_{isp} - E_{isp}}{E_{isp}} = S(-\tau) - 1 = Z\ . \tag{75}$$

Таким образом, фотон, испущенный в эпоху -τ, за время своего путешествия по Вселенной не только не теряет энергию (не «стареет»), но совсем наоборот, увеличивает её. Это приводит нас к выводу, что постоянная Планка растет с расширением Вселенной. Действительно, из $E = h\nu$ и $E_0 = S \cdot E$ (см. (74)) следует $h_0 \nu_0 = Sh\nu$, но

$$\nu_0 = \frac{1}{\Delta t_0} = \frac{1}{S\Delta t} = \frac{1}{S}\nu \ ,$$

что дает окончательно

$$h_0 = S^2 \cdot h \ . \qquad (76)$$

Можно получить (76) и исходя непосредственно из размерности постоянной Планка. Выражая постоянную Планка через планковские массу, длину и время и учитывая их «расширение», получаем

$$h_0 = \frac{m_0 l_0^2}{t_0} = \frac{Sm(Sl)^2}{(St)} = S^2\frac{ml^2}{t} = S^2 h \ .$$

Найдем далее массу Вселенной. Но что такое масса Вселенной? В нашей модели известна плотность, но неизвестен объем, точнее, объем бесконечный, т.к. кривизна пространства отрицательна (k = -1). Но давайте спросим себя, что для нас является «нашей» Вселенной? Или иначе, как далеко могут находиться объекты во Вселенной, которые в принципе могут оказывать влияние на нашу Галактику (Солнце, Землю)? Никакой сигнал не может распространяться (в расширяющейся со скоростью света Вселенной, см. (41)) быстрее света, поэтому наибольшее, принципиально возможное расстояние равно расстоянию, которое пройдет свет за все время существования Вселенной (см. (50) с учетом (63))

$$R_0 = \frac{c}{\bar{H}_0} \ ,$$

т.е. это наибольшее расстояние равно хаббловскому радиусу.

Таким образом, для нас «вся» Вселенная — пространство внутри сферы радиуса R_0 с постоянной (средней) плотностью (60), и тогда её масса

$$M_0 = \rho_0 \frac{4\pi}{3} R_0^3 = \frac{3\bar{H}_0^2}{4\pi G} \cdot \frac{4\pi}{3} \frac{c^3}{\bar{H}_0^3} = \frac{c^3}{G\bar{H}_0} \ . \qquad (77)$$

В силу однородности, те же выводы имеют место для любой точки Вселенной, поэтому массу (77) можно назвать массой Вселенной в современную эпоху,

При этом, конечно, следует хорошо понимать, что масса Вселенной — величина довольно условная. Кроме того, можно спросить, почему мы взяли возраст Вселенной ньютоновский, а не эйнштейновский, почему среднюю плотность взяли современную, тогда как с удалением вглубь Вселенной мы уходим в более ранние эрохи, где плотность меньше, и т.д. Соответствующие поправки можно ввести, но вычисленная таким образом масса не станет менее условной, а масса (77), по крайней мере, близка к верхней оценке массы Вселенной в современную эпоху. Массу (77) имеет смысл назвать хаббловской массой, имея в виду, что её гравитационный (а также антигравитационный !) радиус совпадает с хаббловским радиусом.

Мы уже отмечали в [1], что Вселенная является уникальным объектом, у которого гравитационный и антигравитационный радиусы совпадают, и это обстоятельство существенно укрепляет нашу уверенность, что мы на верном пути.

Действительно, если признать важность гравитационного и антигравитационного радиусов в эволюции и строении Вселенной, и что только масса (77) обладает уникальным свойством равенства её гравитационного и антигравитационного радиусов (и признавая, разумеется уникальность Вселенной), то одного этого обстоятельства достаточно, чтобы считать массу (77) массой Вселенной, даже если бы у нас не было никаких других соображений.

Можно оценить хаббловскую массу Вселенной в любую эпоху следующим способом. Постоянная Хаббла в современную эпоху (см. (63)) $\overline{H}_0 = H_0(1-\frac{\Omega_0}{2})$. Положим, что постоянная Хаббла (в отличие от параметра Хаббла (22)) в эпоху, соответствующую параметру Ω, равна

$$\overline{H} = H\left(1-\frac{\Omega}{2}\right)$$

при этом из (22) находим (см. также (32))

$$\overline{H} = \overline{H}_0 \cdot S\,, \quad \frac{1}{\overline{H}_0} = \frac{1}{\overline{H}} \cdot S \tag{78}$$

И тогда хаббловская масса в эпоху, соответствующую параметру Ω,

$$M = \frac{c^3}{G\overline{H}}\ ,$$

причем хаббловская масса тоже «расширяется» (см. (78))

$$M_0 = \frac{c^3}{G\overline{H}_0} = \frac{c^3}{G\overline{H}} S = M \cdot S\ .$$

То же можно сказать и о хаббловском радиусе

$$R_0 = \frac{c}{\overline{H}_0} = \frac{c}{\overline{H}} S = R \cdot S\,, \quad R = \frac{c}{\overline{H}}\ .$$

Законы «расширения» постоянной Хаббла, хаббловской массы и хаббловского радиуса, а также соответствующие законы «расширения» планковских времени, массы и длины показывают, что эти величины пропорциональны, и коэффициент пропорциональности не меняется с эволюцией. Мы полагаем, что коэффициент пропорциональности равен «большому числу» $4\pi e^{\lambda} = 4{,}104 \cdot 10^{60}$, где λ = 137,0360 — обратная постоянной тонкой структуры, т.е. имеет место формула

$$\frac{1/\overline{H}}{t} = \frac{M}{m} = \frac{R}{l} = 4\pi e^{\lambda}\ , \tag{79}$$

о которой мы уже говорили в [2], гл.V.

Скажем еще несколько слов о формуле (79). Прежде всего пропорциональная зависимость

$$\frac{1/\overline{H}}{t} = \frac{M}{m} = \frac{R}{l}$$

выглядит тривиальной. Действительно, умножим числитель и знаменатель первого отношения на постоянную $\frac{c^3}{G}$ и получим второе отношение, умножим на постоянную c — получим третье отношение. И даже тот факт (если это факт), что коэффициент пропорциональности равен $4\pi e^{\lambda}$, не является самым ценным (хотя если это факт, то его трудно переоценить) в этой формуле. Самое ценное в этой формуле (независимо от того, имеет место указанный факт, или нет), с нашей точки зрения, это её «эволюционный» смысл. Эта формула показывает, что Вселенная в определенном смысле «стационарна» (число единиц времени, длины и массы для Вселенной как целого не меняется. Вселенная расширяется, потому что «расширяются» сами единицы), а это в некоторой степени может «оправдать» и столь точные теоретические (!) значения постоянной Хаббла и относительной плотности (64) и даже космологический постулат, а кроме того, позволяет подойти к построению модели Вселенной (со всеми полученными выше свойствами) совсем с другой стороны, вообще без космологических уравнений Эйнштейна (Фридмана), но разумеется, не без теории относительности (см. [4], Кватерная Вселенная, а также [2], гл. XV).

Вернемся еще к законам сохранения. Что сегодня мы можем утверждать с уверенностью по этому вопросу?

Законы сохранения имеют место в современную эпоху — это эмпирический факт. Расширение Вселенной не нарушает законов сохранения, так что мы можем быть уверенными, что и в будущем законы сохранения будут иметь место в нашей Вселенной. (Здесь под «нашей» Вселенной мы имеем в виду нашу модель Вселенной, а не Вселенную как таковую. Их адекватность — это особый вопрос.)

Есть ли у нас основания к такой же уверенности в прошлом? По-видимому, до какого-то, не очень далекого момента в прошлом, — да. Но чем дальше в прошлое, тем меньше такой уверенности, более того, появляется уверенность, что законы сохранения вообще не имели места. Действительно, в самых общих чертах история Вселенной представляется так: сначала не было «ничего» (или даже «было в минусе»), а теперь есть «все».

Ситуация представляется столь неудовлетворительной с точки зрения современной физики, что может поставить под сомнение всю рассматриваемую модель Вселенной (однако подобная же ситуация в теории "большого взрыва" обсуждается вполне серьезно). Можно ли «спасти» нашу модель? Да, можно, если вспомним, что наша Вселенная — это еще «не все на свете», а «всего лишь» «внутреннее пространство» «материальной точки» (см. [1]).

Мы подошли к критическому моменту в нашем описании, когда кавычки приходится ставить почти к каждому слову. Поскольку ситуация до конца статьи не изменится, мы предлагаем считать нижеследующее «взятым в кавычки», а в тексте кавычки расставлять не будем (предоставляя это читателю на его усмотрение).

7. Заключение. Эволюция Вселенной. Основные выводы.

Совершенно очевидно, что если рассматривать Вселенную как часть более широкой замкнутой системы, то проблема законов сохранения для нашей Вселенной снимается и переносится на большую систему, которую мы назовем *Метавселенной*. При этом внешняя часть Метавселенной для нас не наблюдаема, поэтому мы можем о ней предполагать, в принципе, все что угодно, но последнее равносильно тому, что мы ничего не можем предполагать. Однако, к счастью, у нас есть все основания считать, что Метавселенная должна неплохо описываться моделью материальной точки, которую мы рассмотрели в [1]. И основанием для этого является то обстоятельство, что, во-первых, наша Вселенная хорошо описывается внутренней частью модели материальной точки (см. [1], а также [2], гл. IV и V), а во-вторых, внешняя часть, так же хорошо, описывается ньютоновской теорией тяготения. Таким образом. рассматривая модель материальной точки в качестве модели Метавселенной, мы имеем возможность проследить эволюцию Вселенной как наблюдаемую сторону эволюции Метавселенной.

Ниже мы предлагаем принципиальную схему эволюции Метавселенной, не касаясь в деталях вопросов топологии пространства, ни конкретных физических механизмов эволюции.

Масса (энергия) нашей Вселенной растет, следовательно, во внешней части Метавселенной она должна уменьшаться или просто исчезать, т.к. по предположению закон сохранения энергии в Метавселенной имеет место. Единственный процесс исчезновения массы (энергии) из пространства (не переход из одной формы в другую, а именно исчезновение), который мы можем представить в рамках современной физики — это гравитационный коллапс. Таким образом, Метавселенная с точки зрения внешнего пространства — коллапсар, а с нашей точки зрения — внутренность коллапсара (не черной дыры, а внутренность сингулярной точки. Внутренность черной дыры еще принадлежит внешнему пространству. Напомним, что мы договорились не ставить кавычек.)

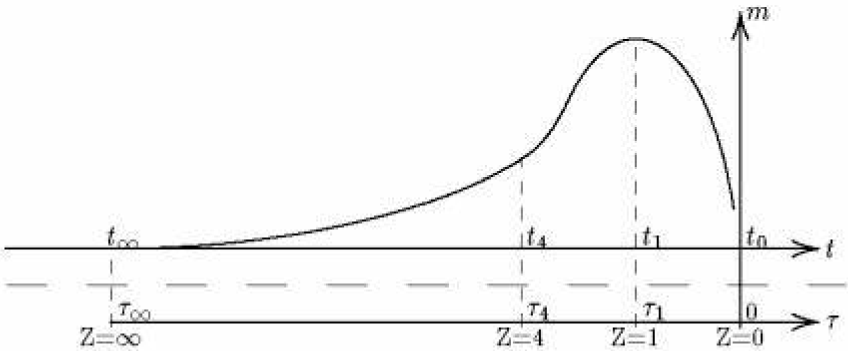

Рис. 2

Развитие гравитационного коллапса во времени схематически можно представить графиком (Рис. 2), где по горизонтальной оси откладывается время, а по вертикальной — масса, уходящая из внешнего пространства в единицу времени. При этом, неважно, в каком смысле понимаются эта масса и время (т.е. в какой системе отсчета и т.п.), важно только, что они монотонно связаны с приращением массы и времени в нашей Вселенной, что представляется достаточно естественным. Возможно также, что именно внешнее время определяет направление времени в нашей Вселенной.

Вначале Метазвезда (назовем так для определенности) находилась неопределенно долго ($t < t_\infty$) в состоянии равновесия, затем по мере выгорания ядерного топлива и уплотнения звезды начался ($t = t_\infty$) процесс коллапса, сначала медленно (например, за счет туннелирования), затем ($t = t_4$) начался катастрофический процесс, который достиг максимума ($t = t_1$) и затем стал более или менее быстро спадать.

Изнутри этот процесс можно интерпретировать следующим образом. Нижняя горизонтальная ось на рис. 2 представляет шкалу времени (космологического) нашей Вселенной, на которой нанесены соответствующие моменты эволюции, а также значения параметра Z . До момента $t = t_\infty$ во внешнем пространстве, в нашей Вселенной ничего не происходило, а следовательно и время τ было неопределенным (можно сказать, что времени не было). С началом коллапса $t = t_\infty$ начался отсчет времени в нашей Вселенной ($\tau = \tau_\infty$) и началось поступление энергии. Это могло происходить примерно так.

Пространство нашей Вселенной в эту эпоху можно представить как топологическое сито со сколь угодно малыми и частыми ячейками (дырочками), через которые и поступает энергия в виде излучения, соответственно, со сколь угодно малой энергией и длиной волны. Напомним, что в начале эволюции ($Z \to \infty$) постоянная Планка равна нулю (см. (76)) и следовательно, никаких ограничений снизу не было (мы имеем в виду неравенства Гейзенберга, т.н. соотношения неопределенностей). Мы полагаем, что именно это излучение, расширенное за время эволюции, мы и принимаем сейчас как реликтовое. При этом совершенно естественна его замечательная однородность и изотропность. Что касается теплового характера реликтового излучения, то наша интерпретация представляется также достаточно привлекательной, т.к. представить более черное излучающее тело, чем само пространство (топологическое сито) невозможно. С другой стороны, современная температура реликтового излучения $T_0 \approx 2,7°K$, которая традиционно объясняется остыванием Вселенной от $T = \infty$, может быть объяснена разогревом от абсолютного нуля.

Далее в момент $\tau = \tau_4$, когда во внешнем пространстве начался катастрофический процесс коллапса, в пространстве нашей Вселенной образовалось ($Z \approx 4$) крупное топологическое сито (можно сказать, что мелкое сито не выдержало большого потока энергии и прорвалось более или менее равномерно. При этом мелкое сито между крупными дырками сохранилось. Напомним еще раз, что мы договорились не ставить кавычек), через которые энергия стала поступать в больших количествах. В начальный момент каждая такая топологическая дырка представлялась, по-видимому, как точка сингулярности, которая затем эволюционировала, например, в соответствии со сценарием модели горячей Вселенной. Естественно отождествить такие объекты с квазарами.

Далее, к моменту $\tau = \tau_1$ ($Z \approx 1$), когда средняя плотность перешла нулевую отметку, началось формирование звезд, галактик, скоплений галактик и т.д. (или, может быть, распад квазаров на галактики, звезды и т.д.).

Что касается мелкого топологического сита, то оно сохранилось и, вероятно, продолжает свой вклад в фоновое излучение и (тем самым, а может и помимо того) в увеличение массы Вселенной.

Заметим, что значения $Z \approx 4$ и $Z \approx 1$ выбраны довольно условно, но не совсем произвольно. Первое $Z \approx 4$ выбрано потому, что объектов с красным смещением $Z > 4$, по-видимому, нет или очень мало (по крайней мере, в оптическом диапазоне волн. Однако, существует множество мощных т.н. точечных источников радиоизлучения, природа которых далеко еще не ясна.). Что касается $Z \approx 1$, то по данным американского астронома Х.Арпа статистическое распределение квазаров по мощности излучения в зависимости от параметра Z соответствует примерно нормальному закону с максимумом при $Z = 1{,}1$ (Космология. Теория и наблюдения. «Мир», М., 1978, стр. 91). Именно поэтому мы предполагаем, что максимум коллапса соответствует $Z \approx 1$. И тем более впечатляет значение $Z = 1{,}058$, полученное независимо в нашей модели.

В заключение части, взятой в кавычки, отметим без комментария еще один удивительный факт. Взгляните, читатель, еще раз на зависимость на рис. 2. Если за начало отсчета времени $\tau = 0$ взять точку, соответствующую $Z = \infty$, и рассматривать зависимость относительно переменной $\lambda = c\tau$ или перерисовать зависимость относительно переменной $\nu = \dfrac{1}{\tau}$, то полученная кривая совпадает с планковской кривой в законе излучения черного тела (!?).

Закроем на этом кавычки и перечислим некоторые проблемы современной космологии, которые, как нам представляется, удовлетворительно объясняются предложенной моделью.

1. Вселенная в прошлом не имела состояния с бесконечной плотностью. Если квазары и родились из сингулярного состояния, то, по-видимому, это состояние большой, но не бесконечной плотности (“белые дыры”). Иначе говоря, "большого" (глобального) взрыва не было, но могло быть (и есть сейчас !) множество "маленьких" (локальных) взрывов.

2. Реликтовое излучение, его однородность и изотропия. Современная температура реликтового излучения $T_0 \approx 2{,}7°K$ объясняется разогревом от абсолютного нуля.

3. Гигантская энергия квазаров, их большие красные смещения, генетическая связь с активными ядрами галактик.

4. Наблюдаемая неоднородность вещества во Вселенной при однородном (в среднем) и изотропном распределении скоплений галактик (и, по-видимому, квазаров) в пространстве.

5. Вращение галактик, электрические и магнитные поля и пр. Если идти до конца в убеждении, что законы сохранения имеют место в Метавселенной, то следует признать, что вместе с веществом в нашу Вселенную должны «переходить» также вращательный момент, электрические (и другие) заряды, поля и т.д. При этом, возможно, имеет место эффект самоорганизации материи, называемый “ячейки Бенара (Рэлея–Бенара)”, определяющий изначальную ячеистую структуру вещества во Вселенной.

6. В связи с неоднократно поднимаемым в литературе вопросом о необходимости «новых» законов физики для объяснения некоторых наблюдаемых во Вселенной явлений, сформулируем наше философское кредо по этому вопросу:

Не законы физики определяют эволюцию Вселенной,
а эволюция Вселенной определяет законы физики.

Ссылки:

[1]. Вселенная. Постньютоновская (классическая) модель. Статья : http://yadi.sk/d/X7D6n9puHBunh
[2]. Натуральная философия. Книга : http://yadi.sk/d/xIZAI9HLHBxo7
[3]. Расширение Вселенной => локальная физика. Статья : http://yadi.sk/d/LlqhEf-_HBuKr
[4]. “Специальные“ теории относительности. Статья : http://yadi.sk/d/JaBkfpP8HBuPv
[5]. Космологическая модель Фридмана (новая интерпретация). Статья : http://yadi.sk/d/bMtccbLIHBuqp
[6]. Теория относительности, новые идеи, новые подходы. Статья : http://yadi.sk/d/OUJwyeTpHBuUo

В статье рассматриваются только оригинальные идеи автора, поэтому ссылки приводятся только на работы автора.

* * *