Определение общего члена последовательности

Владимир Браун

11.06.2022

Вообще говоря, задача нахождения общего члена числовой последовательности по её отрезку единственного решения не имеет. Любой такой отрезок может быть продолжен бесчисленным множеством способов. Однако решение может существовать при наличии дополнительных условий.

В частности, решение существует, если известно, что искомая последовательность есть последовательность значений многочлена некоторой степени от целого аргумента, и заданный отрезок последовательности имеет достаточную для этой степени длину.

Итак, речь пойдёт о последовательностях значений многочленов от целого аргумента:

$$a_n = an + b\,,$$

$$a_n = an^2 + bn + c\,,$$

$$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d\,,$$

или, в общем

$$a_n = an^k + bn^{k-1} + \ \dots\ + yn + z\,.$$

Если некоторая такая последовательность представляет значения многочлена степени k, то для определения её общего члена достаточно иметь её отрезок из $k + 1$ чисел.

1. Для линейной последовательности $a_n = an + b$ это вполне очевидно.
Если нам известны два соседних члена последовательности, которые без ограничения общности можно считать первым и вторым её членами, a_1 и a_2, то прибавляя их разность $a_2 - a_1$ к последнему известному члену, мы можем последовательно получить любое число членов последовательности: $a_3 = a_2 + (a_2 - a_1)$, $a_4 = a_3 + (a_2 - a_1)$, ...
Так по индукции мы получим формулу общего члена линейной последовательности:

$$a_n = (n-1)a_2 - (n-2)a_1\,, \quad \text{или} \quad a_n = (a_2 - a_1)n + 2a_1 - a_2\,.$$

Менее очевидно, что аналогичные формулы могут быть записаны и для последовательности значений многочлена любой степени k. Для вывода нужно привлекать не только разности членов, но и разности разностей, и т.д. Например:

2. Квадратичная последовательность $a_n = an^2 + bn + c$.
Если известны три первых члена последовательности: a_1, a_2, a_3, то, аналогично случаю линейной последовательности, следующие члены последовательности получаются по индукции. Отличие состоит в том, что в данном случае постоянными будут не первые разности членов последовательности, а вторые разности – разности разностей членов последовательности.

Обозначим первые разности как b_n, а вторые, постоянные – как c. Тогда имеем:

$$b_1 = a_2 - a_1,$$

$$b_2 = a_3 - a_2, \qquad c = b_2 - b_1, \quad c = a_3 - 2a_2 + a_1.$$

Первые разности образуют линейную последовательность:

$$b_3 = b_2 + c,$$

$$b_4 = b_3 + c,$$

$$b_5 = b_4 + c, \ldots .$$

Члены искомой квадратичной последовательности равны:

$$a_4 = a_3 + b_3,$$

$$a_5 = a_4 + b_4,$$

$$a_6 = a_5 + b_5, \ldots,$$

или, после рекурсивной замены разностей вплоть до исходных членов:

$$a_4 = 3a_3 - 3a_2 + a_1,$$

$$a_5 = 6a_3 - 8a_2 + 3a_1,$$

$$a_6 = 10a_3 - 15a_2 + 6a_1, \ldots .$$

Здесь числовые коэффициенты при a_i ($i = 3, 2, 1$) образуют последовательности:

$$A_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}, \qquad B_n = n^2 - 4n + 3, \qquad C_n = \frac{n^2 - 5n + 6}{2},$$

или, если разложить на множители:

$$A_n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}, \quad B_n = (n-1)\cdot(n+3), \quad C_n = \frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$

В итоге получаем следующий общий член квадратичной последовательности:

$$a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}a_3 - (n-1)\cdot(n-3)a_2 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}a_1,$$

или, после перегруппировки:

$$a_n = \frac{a_1 - 2a_2 + a_3}{2}n^2 - \frac{5a_1 - 8a_2 + 3a_3}{2}n + 3a_1 - 3a_2 + a_3.$$

3. Кубическая последовательность, $a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$.

Если известны четыре первых члена последовательности: a_1, a_2, a_3, a_4, то, как и в двух предыдущих случаях, следующие члены последовательности получаются по индукции. Отличие состоит в том, что в данном случае постоянными будут не первые и не вторые разности членов последовательности, а третьи разности – разности вторых разностей членов последовательности.

Обозначим первые разности как b_n, вторые – как c_n, и третьи, постоянные – как d. Тогда имеем:

$$b_1 = a_2 - a_1,$$

$$b_2 = a_3 - a_2, \qquad c_1 = b_2 - b_1,$$

$$b_3 = a_4 - a_3, \qquad c_2 = b_3 - b_2, \qquad d = c_2 - c_1,$$

$$d = a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1.$$

Вторые разности образуют линейную последовательность:

$$c_3 = c_2 + d,$$

$$c_4 = c_3 + d,$$

$$c_5 = c_4 + d,$$

$$c_6 = c_5 + d, \dots .$$

Первые разности образуют (квадратичную) последовательность:

$$b_4 = b_3 + c_3,$$

$$b_5 = b_4 + c_4,$$

$$b_6 = b_5 + c_5,$$

$$b_7 = b_6 + c_6, \dots .$$

Члены искомой кубической последовательности равны:

$$a_5 = a_4 + b_4,$$

$$a_6 = a_5 + b_5,$$

$$a_7 = a_6 + b_6,$$

$$a_8 = a_7 + b_7, \dots ,$$

или, после рекурсивной замены разностей:

$$a_5 = 4a_4 - 6a_3 + 4a_2 - a_1,$$

$$a_6 = 10a_4 - 20a_3 + 15a_2 - 4a_1,$$

$$a_7 = 20a_4 - 45a_3 + 36a_2 - 10a_1,$$

$$a_8 = 35a_4 - 84a_3 + 70a_2 - 20a_1, \ \dots .$$

Здесь числовые коэффициенты при a_i (i = 4, 3, 2, 1) образуют последовательности:

$$A_n = \frac{(n-1)(n+2)(n+3)}{6}, \quad B_n = \frac{(n-1)(n+2)\cdot(n+4)}{2},$$

$$C_n = \frac{(n-1)\cdot(n+3)(n+4)}{2}, \quad D_n = \frac{(n-2)(n+3)(n+4)}{6}.$$

В итоге получаем следующий общий член кубической последовательности:

$$a_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} a_4$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)\cdot(n-4)}{2} a_3$$

$$+\frac{(n-1)\cdot(n-3)(n-4)}{2} a_2$$

$$-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} a_1,$$

или, после перегруппировки:

$$a_n = -\frac{a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4}{6} n^3 + \frac{9a_1 - 24a_2 + 21a_3 - 6a_4}{6} n^2$$

$$-\frac{26a_1 - 57a_2 + 42a_3 - 11a_4}{6} n + 4a_1 - 6a_2 + 4a_3 - a_4.$$

4. Для последовательности четвёртой степени, $a_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$, пять первых членов которой равны: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, общий член будет равен:

$$a_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!} a_5$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\cdot(n-5)}{3!\cdot 1!} a_4$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)\cdot(n-4)(n-5)}{2!\cdot 2!} a_3$$

$$-\frac{(n-1)\cdot(n-3)(n-4)(n-5)}{1!\cdot 3!} a_2$$

$$+\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4!} a_1,$$

или, после перегруппировки:

$$a_n = \frac{a_1 - 4a_2 + 6a_3 - 4a_4 + a_5}{24} n^4$$

$$-\frac{14a_1 - 52a_2 + 72a_3 - 44a_4 + 10a_5}{24} n^3$$

$$+\frac{71a_1 - 236a_2 + 294a_3 - 164a_4 + 35a_5}{24} n^2$$

$$-\frac{154a_1 - 428a_2 + 468a_3 - 244a_4 + 50a_5}{24} n$$

$$+5a_1 - 10a_2 + 10a_3 - 5a_4 + a_5.$$

5. Для последовательности пятой степени, $a_n = an^5 + bn^4 + cn^3 + dn^2 + en + f$, шесть первых членов которой равны: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, общий член положим равным:

$$
\begin{aligned}
a_n = {} & \frac{n-1}{6-1}\frac{n-2}{6-2}\frac{n-3}{6-3}\frac{n-4}{6-4}\frac{n-5}{6-5}\quad a_6 \\
& + \frac{n-1}{5-1}\frac{n-2}{5-2}\frac{n-3}{5-3}\frac{n-4}{5-4}\quad\frac{n-6}{5-6}a_5 \\
& + \frac{n-1}{4-1}\frac{n-2}{4-2}\frac{n-3}{4-3}\quad\frac{n-5}{4-5}\frac{n-6}{4-6}a_4 \\
& + \frac{n-1}{3-1}\frac{n-2}{3-2}\quad\frac{n-4}{3-4}\frac{n-5}{3-5}\frac{n-6}{3-6}a_3 \\
& + \frac{n-1}{2-1}\quad\frac{n-3}{2-3}\frac{n-4}{2-4}\frac{n-5}{2-5}\frac{n-6}{2-6}a_2 \\
& + \quad\frac{n-2}{1-2}\frac{n-3}{1-3}\frac{n-4}{1-4}\frac{n-5}{1-5}\frac{n-6}{1-6}a_1,
\end{aligned}
$$

или, после перегруппировки:

$$
\begin{aligned}
a_n = {} & -\frac{a_1 - 5a_2 + 10a_3 - 10a_4 + 5a_5 - a_6}{120}n^5 \\
& + \frac{20a_1 - 95a_2 + 180a_3 - 170a_4 + 80a_5 - 15a_6}{120}n^4 \\
& - \frac{155a_1 - 685a_2 + 1210a_3 - 1070a_4 + 475a_5 - 85a_6}{120}n^3 \\
& + \frac{580a_1 - 2305a_2 + 3720a_3 - 3070a_4 + 1300a_5 - 225a_6}{120}n^2 \\
& - \frac{1044a_1 - 3510a_2 + 5080a_3 - 3960a_4 + 1620a_5 - 274_6}{120}n \\
& + 6a_1 - 15a_2 + 20a_3 - 15a_4 + 6a_5 - a_6 .
\end{aligned}
$$

Здесь факториалы, стоящие в знаменателе предыдущего примера, заменены их сомножителями – расстояниями от очередного заданного члена последовательности до остальных перебираемых в сумме членов. Это позволяет, с одной стороны, компактно записать обобщённую формулу общего члена многочленной последовательности, а с другой – разрешает дальнейшие обобщения.
Пробел в записи произведения указывает на то, что очередной сомножитель, соответствующий номеру члена последовательности в данном слагаемом, пропускается.

Ну, и так далее. Правило построения этих формул очевидно. Если задано k + 1 первых членов последовательности: a_i (i = 1, 2, ..., k + 1), то общий член равен:

$$
a_n = \sum_{i=1}^{k+1}\left(\prod_{j=1,\ j\neq i}^{k+1}\frac{n-j}{i-j}\right)a_i \ .
$$

Однако заданные члены последовательности не должны обязательно быть соседними, это могут быть произвольные члены последовательности, то есть, задаваемые члены последовательности могут находиться на произвольном расстоянии друг от друга.

Пусть, например, для последовательности пятой степени заданы следующие шесть членов: $a_2, a_3,\ a_5, a_6,\ a_8, a_9$. Тогда общий член последовательности будет равен:

$$\begin{aligned}
a_n = {} & \frac{n-2}{9-2}\frac{n-3}{9-3}\frac{n-5}{9-5}\frac{n-6}{9-6}\frac{n-8}{9-8}\quad a_9 \\
& + \frac{n-2}{8-2}\frac{n-3}{8-3}\frac{n-5}{8-5}\frac{n-6}{8-6}\quad\frac{n-9}{8-9}a_8 \\
& + \frac{n-2}{6-2}\frac{n-3}{6-3}\frac{n-5}{6-5}\quad\frac{n-8}{6-8}\frac{n-9}{6-9}a_6 \\
& + \frac{n-2}{5-2}\frac{n-3}{5-3}\quad\frac{n-6}{5-6}\frac{n-8}{5-8}\frac{n-9}{5-9}a_5 \\
& + \frac{n-2}{3-2}\quad\frac{n-5}{3-5}\frac{n-6}{3-6}\frac{n-8}{3-8}\frac{n-9}{3-9}a_3 \\
& + \quad\frac{n-3}{2-3}\frac{n-5}{2-5}\frac{n-6}{2-6}\frac{n-8}{2-8}\frac{n-9}{2-9}a_2,
\end{aligned}$$

или, после перегруппировки:

$$\begin{aligned}
a_n = {} & -\frac{5a_2 - 14a_3 + 35a_5 - 35a_6 + 14a_8 - 5a_9}{2520}n^5 \\
& + \frac{155a_2 - 420a_3 + 980a_5 - 945a_6 + 350a_8 - 120a_9}{2520}n^4 \\
& - \frac{1865a_2 - 4830a_3 + 10325a_5 - 9555a_6 + 3290a_8 - 1095a_9}{2520}n^3 \\
& + \frac{10845a_2 - 26320a_3 + 50400a_5 - 44695a_6 + 14490a_8 - 4720a_9}{2520}n^2 \\
& - \frac{30330a_2 - 66696a_3 + 112140a_5 - 95970a_6 + 29736a_8 - 9540a_9}{2520}n \\
& + \frac{90}{7}a_2 - 24a_3 + 36a_5 - 30a_6 + 9a_8 - \frac{20}{7}a_9.
\end{aligned}$$

В результате обобщения на не соседние исходные члены, обобщенная формула общего члена многочленной последовательности несколько усложнится – номера заданных членов приходится, в свою очередь, пронумеровать. Тогда, если задано $k+1$, не обязательно соседних, членов последовательности: a_{n_i} ($i = 1, 2, ..., k+1$), общий член последовательности будет равен:

$$a_n = \sum_{i=1}^{k+1}\left(\prod_{j=1,\ j\neq i}^{k+1}\frac{n-n_j}{n_i-n_j}\right)a_{n_i}\ .$$

Рассмотрим несколько примеров.

1. Задан отрезок последовательности состоящий из трёх первых её членов: 1, 4, 9.

   Подставив эти числа в формулу общего члена квадратичной последовательности:

$$a_n = \frac{1-2\cdot 4+9}{2}n^2 - \frac{5\cdot 1-8\cdot 4+3\cdot 9}{2}n + 3\cdot 1-3\cdot 4+9,$$

   получим, как и следовало ожидать:

$$a_n = n^2.$$

   Если заданы четыре числа: 1, 4, 9, 16, то подставив их в формулу общего члена кубической последовательности, получим ту же формулу, $a_n = n^2$. Для определения квадратичной последовательности достаточно три числа. Четыре числа избыточны.

2. Возьмем другую тройку чисел: 1, 4, 10.

   Опять подставив их в формулу общего члена квадратичной последовательности:

$$a_n = \frac{1-2\cdot 4+10}{2}n^2 - \frac{5\cdot 1-8\cdot 4+3\cdot 10}{2}n + 3\cdot 1-3\cdot 4+10,$$

   получим на этот раз:

$$a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1.$$

   Всякая тройка чисел определяет некоторую квадратичную последовательность.

3. Задана четвёрка чисел: 1, 2, 4, 8. Нетрудно распознать в ней степени двойки:

$$a_n = 2^{n-1}.$$

   Но подставив эти числа в формулу общего члена кубической последовательности:

$$a_n = -\frac{1-3\cdot 2+3\cdot 4-8}{6}n^3 + \frac{9\cdot 1-24\cdot 2+21\cdot 4-6\cdot 8}{6}n^2$$

$$-\frac{26\cdot 1-57\cdot 2+42\cdot 4-11\cdot 8}{6}n + 4\cdot 1-6\cdot 2+4\cdot 4-8,$$

   мы получим формулу:

$$a_n = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{4}{3}n,$$

   которая для следующего члена последовательности даёт значение $a_5 = 15$, а не степень двойки, $a_5 = 2^{5-1} = 16$.

   Без дополнительных условий единственного решения не существует.

4. Заданы члены: $a_2 = 32$, $a_3 = 243$, $a_5 = 3125$, $a_6 = 7776$, $a_8 = 32768$, $a_9 = 59049$.

   Найти подходящий многочлен минимальной степени. Для номеров 2, 3, 5, 6, 8, 9 у нас уже есть готовая формула. Подставив в неё заданные числа, получим:

$$a_n = n^5.$$

   Решение возможно не только для идущих подряд членов последовательности, но и для расположенных в произвольном месте последовательности.

И в заключение, ещё одно, радикальное, обобщение.

Поскольку заданные члены не обязаны быть соседними, и могут находиться на произвольном расстоянии друг от друга, целый аргумент можно вообще заменить действительным числом, и тогда формула общего члена последовательности преобразуется в интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \left(\prod_{j=0,\ j \neq i}^{k} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) f(x_i),$$

представляющий собой многочлен степени не выше k проходящий через $k + 1$ заданных точек (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_k, y_k).

Наоборот, если интерполяционный многочлен Лагранжа записать для целого x:

$$f(n) = \sum_{i=0}^{k} \left(\prod_{j=0,\ j \neq i}^{k} \frac{n - n_j}{n_i - n_j} \right) f(n_i),$$

то получим формулу по сути идентичную полученной нами другим путём формуле общего члена многочленной последовательности.