Закономерности движения
в центральном поле тяготения

Владимир Браун

26.03.2023

Основные закономерности движения тела в центральном поле тяготения известны под названием трёх законов движения планет Кеплера. Законы Кеплера кинематические, и получены эмпирическим путём, на основе астрономических наблюдений Тихо Браге. Здесь дан вывод кинематической теории движения в центральном поле тяготения, являющейся обобщением законов Кеплера.

1. Универсальное уравнение траектории

Используя две эквивалентные формы записи производной, по Ньютону и по Лейбницу, запишем в полярной системе координат (r, φ) тождества

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t} \quad \text{и} \quad \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t}\,.$$

Исключив из них время,

$$\mathrm{d}\,\varphi = \dot{\varphi}\,\mathrm{d}\,t\,, \;\; \mathrm{d}\,t = \frac{\mathrm{d}\,r}{\dot{r}}\,; \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\,\varphi = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}\mathrm{d}\,r\,,$$

и проинтегрировав почленно последнее уравнение, получим интеграл

$$\varphi = \int \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}\mathrm{d}\,r\,,$$

который и представляет собой универсальное уравнение траектории, одно из двух возможных, в полярной системе координат. Конечно, для тех случаев, когда угловая и радиальная скорости, $\dot{\varphi}$ и $\dot{r}$, представимы функциями от r и интеграл может быть взят.

2. Выражение скорости через радиальную и угловую скорости

Так как векторы радиальной и трансверсальной составляющих скорости ортогональны, то квадрат скорости равен сумме квадратов этих составляющих:

$$v^2 = v_r^2 + v_\perp^2\,.$$

Поскольку радиальная составляющая скорости есть просто скорость изменения координаты r (радиальная скорость), а трансверсальная составляющая скорости есть скорость изменения угловой координаты (угловая скорость) умноженная на радиус r,

$$v_r = \dot{r}\,, \quad v_\perp = r\dot{\varphi}\,,$$

то в итоге имеем следующее выражение скорости через радиальную и угловую скорости:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\,.$$

3. Представление угловой скорости как функции расстояния

Из закона сохранения момента импульса следует, что, при постоянной массе, сохраняется и момент скорости или угловой момент:

$$L = r v_{\perp}, \text{ или } L = r^2 \dot{\varphi}.$$

Отсюда получаем искомое представление угловой скорости $\dot{\varphi}$ как функции от r:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}.$$

4. Уравнение скорости как функции расстояния

Заменив в выражении скорости через составляющие,

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2,$$

угловую скорость $\dot{\varphi}$ её выражением через момент скорости и расстояние, получим уравнение не содержащее угловой координаты φ:

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2}.$$

Центральное поле тяготения должно допускать устойчивые ограниченные траектории – планетарные орбиты. Движение планет происходит в ограниченной области, между минимальным и максимальным расстоянием от центра тяготения. Минимальное и максимальное расстояние планетарных орбит Солнечной системы называются перигелием и афелием орбиты, и перицентром и апоцентром в общем случае произвольного центрального тела, обозначим их как p и a.

При достижении границ указанной области радиальная составляющая скорости,

$$\dot{r} = \sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}},$$

становится равной нулю. Приравняв радиальную скорость к нулю, получим уравнение относительно r, корнями которого являются a и p – апоцентр и перицентр траектории:

$$v^2 r^2 - L^2 = 0.$$

Предположим, что функция $v^2 r^2 - L^2$ является многочленом от r. Наличие у многочлена корней a и p означает, что он делится на $(a - r)$ и $(r - p)$, и имеет представление:

$$v^2 r^2 - L^2 = w(a - r)(r - p),$$

где w – некоторый многочлен. Из этого равенства получаем для скорости уравнение:

$$v^2 = \frac{L^2 + w(a - r)(r - p)}{r^2},$$

или, после раскрытия скобок и объединения членов по степеням r:

$$v^2 = -w + \frac{w(a + p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2}.$$

Взяв значение квадрата скорости на бесконечно большом расстоянии от центра тяготения, предполагая, что значение w в r_∞ остаётся конечным, получим:

$$v_\infty^2 = -w\,.$$

То есть, многочлен $-w$ есть константа – квадрат остаточной скорости.

5. Представление радиальной скорости как функции расстояния

Имея уравнение скорости как функции расстояния, нетрудно получить теперь и искомое представление радиальной скорости:

$$\dot r = \sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}} = \frac{\sqrt{v^2 r^2 - L^2}}{r} = \frac{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}{r}\,.$$

6. Уравнение траектории

Получив представления угловой и радиальной скорости как функций расстояния,

$$\dot\varphi = \frac{L}{r^2} \quad \text{и} \quad \dot r = \frac{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}{r}\,,$$

подставим их теперь в наше универсальное уравнение траектории:

$$\varphi = \int \frac{\dot\varphi}{\dot r}\,\mathrm{d}\,r = \int \frac{L}{r\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\,\mathrm{d}\,r\,.$$

Интеграл табличный. В случае эллиптической скорости, когда w больше нуля, подходит решение: Двайт Г. Б. Таблицы интегралов, № 380.111.
Взяв интеграл, получаем уравнение траектории как функцию $\varphi(r)$:

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{wap}} \arccos\frac{2ap-(a+p)r}{(a-p)r}\,.$$

(Так как $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$, то это решение может быть записано в различных формах. Мы выбрали здесь вариант с арккосинусом, при котором начало траектории, при нулевой константе интегрирования, находится в точке перицентра: $\varphi(p) = 0$.)
Чтобы получить уравнение траектории как функцию $r(\varphi)$, решим данное уравнение относительно r, и в результате получим следующее уравнение траектории:

$$r = \frac{f}{1 + e\cos(i\varphi)}\,,$$

где e – эксцентриситет орбиты, f – фокальный параметр орбиты, i – параметр смещения перицентра орбиты, и

$$e = \frac{a-p}{a+p},\ f = \frac{2ap}{a+p},\ i = \frac{\sqrt{wap}}{L}\,.$$

Хотя интеграл брался для случая эллиптической скорости, $e < 1$, полученное в итоге уравнение, с эксцентриситетом и фокальным параметром, оказывается пригодным и для других скоростей – параболической, $e = 1$, и гиперболической, $e > 1$.

7. Интеграл времени как функции расстояния

Начнём с тождества

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

Из него получаем:

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\dot{r}}\mathrm{d}r, \qquad t = \int \frac{1}{\dot{r}}\mathrm{d}r.$$

Подставив сюда выражение радиальной скорости как функции расстояния от центра тяготения, получаем следующий интеграл времени:

$$t = \int \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\mathrm{d}r.$$

8. Период обращения

В общем случае, период обращения – это не время совершения полного оборота, равного 2π, но время, за которое проходится повторяющийся участок траектории, например, участок от перигелия до афелия и обратно до перигелия. Воспользовавшись интегралом времени, получаем для периода обращения определённый интеграл

$$T = 2\int_p^a \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\mathrm{d}r.$$

Интеграл табличный. Для эллиптической скорости, когда w больше нуля, подходит решение: Двайт Г. Б. Таблицы интегралов, № 380.011, со ссылкой на № 380.001. Откуда, записывая решение в варианте с арккосинусом, получаем:

$$T = \frac{2}{\sqrt{w}}\left(\frac{a+p}{2}\arccos\frac{a+p-2r}{a-p} - \sqrt{(a-r)(r-p)}\right)\Bigg|_p^a,$$

то есть,

$$T = \frac{\pi(a+p)}{\sqrt{w}}.$$

9. Смещение перицентра траектории

Смещение перицентра определяется периодом функции

$$r(\varphi) = \frac{f}{1 + e\cos(i\varphi)},$$

задающей траекторию. Её период, совпадающий с периодом функции $\cos(i\varphi)$, в отличие от периода функции $\cos(\varphi)$, не равен полному обороту, 2π, но равен $2\pi/i$. Отличие периода функции $r(\varphi)$ от полного оборота и есть искомое смещение:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{i} - 1\right).$$

10. Гравитационное ускорение

Имея уравнение скорости как функции расстояния:

$$v^2 = -w + \frac{w(a+p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2},$$

нетрудно получить и аналогичное уравнение гравитационного ускорения.
Ускорение равно производной по расстоянию половины квадрата скорости:

$$g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-w + \frac{w(a+p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2}\right),$$

то есть,

$$g = -\left(\frac{w(a+p)}{2r^2} + \frac{L^2 - wap}{r^3}\right).$$

Знак минус указывает здесь на направление ускорения, и может быть отброшен, если нас интересует только абсолютная величина ускорения.

* * *

Все полученные закономерности кинематические, в них встречаются только расстояние, время, скорость и ускорение, и не встречаются масса, сила или энергия. Чтобы из кинематической теории получить динамическую физическую теорию, требуется динамические параметры каким-либо образом связать с кинематическими. Нет никакого правила, которое предписывало бы как именно это надо сделать, кроме требования, чтобы полученная теория соответствовала действительности.

В частности, если кинематическому выражению гравитационного ускорения поставить в соответствие выражение гравитационного ускорения классической теории тяготения:

$$\frac{w(a+p)}{2r^2} + \frac{L^2 - wap}{r^3} = \frac{\mathrm{G}M}{r^2},$$

то, приравнивая коэффициенты одинаковых степеней r,

$$\frac{w(a+p)}{2} = \mathrm{G}M, \quad L^2 - wap = 0,$$

получим:

$$w = \frac{2\mathrm{G}M}{a+p}, \quad L = \sqrt{wap}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения нашей кинематической теории, получим известные из классической теории тяготения закономерности движения в центральном поле тяготения:

$$v = \sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a+p}\right)}, \; T = \pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2\mathrm{G}M}}, \; r = \frac{f}{1 - e\sin(\varphi)}, \text{ и др.}$$

Однако, как известно, классическая теория тяготения не вполне соответствует действительности. Перигелий орбит планет, и в особенности перигелий орбиты Меркурия, аномально (т.е. в противоречии с теорией) смещается.

Чтобы динамическая теория соответствовала действительности, следует динамические параметры связать с кинематикой по-другому. Возможно, так:

$$\frac{w(a+p)}{2r^2}+\frac{L^2-wap}{r^3}=\frac{\mathrm{G}M}{r^2}+\frac{6\mathrm{G}^2M^2}{c^2r^3}.$$

В построенной на такой связи динамической теории движения в центральном поле тяготения, смещение перицентра траектории будет равно:

$$\Delta\varphi=2\pi\left(\sqrt{1+\frac{6\mathrm{G}M}{c^2f}}-1\right)\approx 2\pi\frac{3\mathrm{G}M}{c^2f}.$$

Последняя формула уже не раз появлялась в истории физики (как $\Delta\varphi=\frac{6\pi\mathrm{G}M}{c^2A(1-e^2)}$, где A – большая полуось орбиты). Впервые её получил Пауль Гербер в 1898 году. Считается, что данная формула даёт смещение, соответствующее «наблюдаемому» аномальному смещению перигелия Меркурия, и других планет Солнечной системы. Так ли это на самом деле – мы узнаем лишь, когда узнаем механизм работы тяготения, который по-прежнему, как и во времена Ньютона, остаётся для нас загадкой.

Пример

В учебном пособии Е. И. Бутикова приведена задача:

> Баллистический снаряд запускается вертикально вверх с поверхности Земли с начальной скоростью, модуль которой равен круговой скорости для предельно низкой орбиты (т. е. первой космической скорости): $v_0=v_1=\sqrt{gR}$.
> Сколько времени продолжается полет снаряда от пуска до падения на Землю?

Приведённое там же решение – непрямое и излишне сложное. С помощью же полученных нами общих формул, задача решается в лоб, без каких-либо ухищрений.

Решение.

1. Вертикальная траектория конечной высоты – это вырожденная эллиптическая орбита, перигей которой совпадает с центром тяготения, т.е. с центром Земли. Следовательно, для перигея орбиты имеем значение: $p = 0$.

2. Приравняв орбитальную скорость на поверхности Земли, т.е. на расстоянии R от центра, к начальной скорости, получим уравнение

$$\sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a}\right)}=\sqrt{\frac{\mathrm{G}M}{R}},$$

из которого для апогея получаем значение: $a = 2R$.

3. Зная параметры орбиты, продолжительность полёта (подъёма с $r = R$ до $r = 2R$ и падения обратно на Землю) можно вычислить с помощью интеграла времени:

$$t=2\int_R^{2R}\frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\,\mathrm{d}r.$$

Записав решение уже знакомого нам интеграла, имеем:

$$t = 2\sqrt{\frac{a+p}{2GM}}\left(\frac{a+p}{2}\arccos\frac{a+p-2r}{a-p} - \sqrt{(a-r)(r-p)}\right)\Bigg|_{R}^{2R},$$

откуда получаем следующий результат:

$$t = (\pi + 2)\sqrt{\frac{R^3}{GM}}.$$

Сравнивая это выражение с периодом обращения,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}},$$

получим, в согласии с оригинальным решением:

$$t = \frac{\pi + 2}{2\pi}T = 0{,}82T.$$

Ссылки

1. Бутиков Е. И. Закономерности кеплеровых движений. 2006.
2. Исаак Ньютон. Математические начала натуральной философии. — М.: Наука, 1989. О движении тел по подвижным орбитам и о перемещении апсид. Предложение XLIV Теорема XIV.