Закономерности движения в центральном поле тяготения

Владимир Браун

01.06.2023

Иоганну Кеплеру стоило многих лет упорного труда, чтобы на основе многолетних астрономических наблюдений Тихо Браге получить кинематические законы движения планет, послужившие затем Ньютону в установлении динамического закона тяготения. В современных учебниках законы Кеплера, наоборот, выводятся из закона тяготения и законов сохранения момента импульса и энергии [1].
Здесь более общие кинематические уравнения движения пробного тела в центральном поле тяготения выводятся без обращения к закону тяготения, на основе одного только закона сохранения момента импульса и эмпирического факта, что движение планет происходит в ограниченной кольцевой области, между минимальным и максимальным расстоянием от центра тяготения.

I. Кинематика

1. Универсальное уравнение траектории

Используя две формы записи производной, по Ньютону и по Лейбницу, запишем в полярной системе координат (r, φ) тождества

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \quad \text{и} \quad \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Исключив из них время:

$$\mathrm{d}\varphi = \dot{\varphi}\,\mathrm{d}t, \;\; \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{\dot{r}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}\mathrm{d}r,$$

и проинтегрировав почленно последнее уравнение, получим интеграл

$$\varphi = \int \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}\mathrm{d}r,$$

который и представляет собой универсальное уравнение траектории, одно из двух возможных в полярной системе координат. Конечно, для тех случаев, когда угловая и радиальная скорости, $\dot{\varphi}$ и $\dot{r}$, представимы функциями от r и интеграл может быть взят.

2. Выражение скорости через радиальную и угловую скорости

Векторы радиальной и поперечной (трансверсальной) составляющих скорости ортогональны, поэтому квадрат скорости равен сумме квадратов этих составляющих:

$$v^2 = v_r^2 + v_\perp^2.$$

Поскольку радиальная составляющая скорости есть просто скорость изменения координаты r (радиальная скорость), а поперечная составляющая скорости есть скорость изменения угловой координаты (угловая скорость) умноженная на радиус r,

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\perp = r\dot{\varphi},$$

то имеем следующее выражение скорости через радиальную и угловую скорости:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

3. Представление угловой скорости как функции расстояния

Момент скорости тела в центральном поле постоянен:

$$rv_\perp = r^2\dot{\varphi} = L.$$

Отсюда получаем искомое представление угловой скорости как функции от r:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}.$$

4. Уравнение скорости как функции расстояния

Заменив угловую скорость в выражении скорости через составляющие,

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2,$$

её выражением через момент скорости и расстояние, получим уравнение, не содержащее угловой координаты:

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2}.$$

Движение планет происходит в ограниченной кольцевой области, между минимальным и максимальным расстоянием от центра тяготения, которые называются перигелием и афелием орбиты, и перицентром и апоцентром в общем случае, обозначим их как p и a. При достижении границ указанной области радиальная составляющая скорости,

$$\dot{r} = \sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}},$$

становится равной нулю. Приравняв радиальную скорость к нулю, получим уравнение относительно r, корнями которого являются a и p – апоцентр и перицентр траектории:

$$v^2r^2 - L^2 = 0.$$

Предположим, что функция $v^2r^2 - L^2$ является многочленом от r. Наличие корней a и p означает, что многочлен делится на $(a - r)$ и $(r - p)$, и имеет представление:

$$v^2r^2 - L^2 = w(a - r)(r - p),$$

где w – некоторый многочлен. Из этого равенства получаем для скорости уравнение:

$$v^2 = \frac{w(a - r)(r - p)}{r^2} + \frac{L^2}{r^2},$$

или, после раскрытия скобок и объединения членов по степеням r:

$$v^2 = -w + \frac{w(a + p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2}.$$

Взяв значение квадрата скорости на бесконечно большом расстоянии от центра тяготения, предполагая, что значение w в r_∞ остаётся конечным, получим:

$$v_\infty^2 = -w\,.$$

То есть, многочлен $-w$ есть константа, квадрат остаточной скорости.

5. Представление радиальной скорости как функции расстояния

Имея уравнение скорости как функции расстояния, имеем вместе с тем и искомое представление радиальной скорости:

$$\dot{r} = \sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}} = \frac{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}{r}\,.$$

6. Уравнение траектории

Получив представления угловой и радиальной скорости как функций расстояния,

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2} \quad \text{и} \quad \dot{r} = \frac{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}{r}\,,$$

подставим их теперь в наше универсальное уравнение траектории:

$$\varphi = \int \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}\,\mathrm{d}r = \int \frac{L}{r\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\,\mathrm{d}r\,.$$

Интеграл табличный. В случае эллиптической или гиперболической скорости, когда $wap > 0$ и $a - p \neq 0$, подходит решение: [2], № 380.111, случай 5; которое может быть записано в четырёх вариантах, с ±arccos и с ±arcsin. Записав решение в варианте с arccos, получим уравнение траектории как функцию $\varphi(r)$:

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{wap}} \arccos\frac{2ap-(a+p)r}{(a-p)r} + \varphi_0\,.$$

Чтобы получить уравнение траектории как функцию $r(\varphi)$, решим данное уравнение относительно r, и в результате, полагая $\varphi_0 = 0$, получим следующее уравнение:

$$r = \frac{f}{1+e\cos(i\varphi)}\,,$$

где e – эксцентриситет орбиты, f – фокальный параметр орбиты, i – параметр смещения перицентра орбиты, и

$$e = \frac{a-p}{a+p}\,,\ f = \frac{2ap}{a+p}\,,\ i = \frac{\sqrt{wap}}{L}\,.$$

Полученное уравнение есть уравнение движения по вращающемуся коническому сечению, эллипсу или гиперболе. В случае же параболической скорости, когда $w = 0$ и $a = \infty$, уравнение скорости и форма траектории остаются пока неопределёнными. Заметим, что уравнение может быть записано в четырёх вариантах, с ±cos и с ±sin, что дает четыре варианта ориентации траектории, в частности, начального положения перицентра траектории: справа, слева, и выше, ниже центра, соответственно.

7. Интеграл времени как функции расстояния

Начнём с тождества

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}.$$

Из него получаем:

$$\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\dot{r}}\mathrm{d}\,r, \qquad t = \int \frac{1}{\dot{r}}\mathrm{d}\,r.$$

Подставив сюда выражение радиальной скорости как функции расстояния от центра тяготения, получаем следующий интеграл времени:

$$t = \int \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\mathrm{d}\,r.$$

8. Период обращения

В общем случае, период обращения – это не время совершения полного оборота, равного 2π, но время, за которое проходится повторяющийся участок траектории, например, участок от перигелия до афелия и обратно до перигелия. Воспользовавшись интегралом времени, получаем для периода обращения определённый интеграл

$$T = 2\int_p^a \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\mathrm{d}\,r.$$

Интеграл табличный. Для эллиптической скорости, когда $w > 0$ и $a - p \neq 0$, подходит решение: [2], № 380.011, со ссылкой на № 380.001, случай 5. Записывая решение в варианте с арккосинусом, получаем:

$$T = \frac{2}{\sqrt{w}}\left(\frac{a+p}{2}\arccos\frac{a+p-2r}{a-p} - \sqrt{(a-r)(r-p)}\right)\Bigg|_p^a,$$

то есть,

$$T = \frac{\pi(a+p)}{\sqrt{w}}.$$

9. Смещение перицентра траектории

Смещение перицентра определяется периодом функции

$$r(\varphi) = \frac{f}{1 + e\cos(i\varphi)},$$

задающей траекторию. Её период, совпадающий с периодом функции $\cos(i\varphi)$, в отличие от периода функции $\cos(\varphi)$, не равен полному обороту, 2π, но равен $2\pi/i$. Отличие периода функции $r(\varphi)$ от полного оборота и есть искомое смещение:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{i} - 1\right).$$

10. Гравитационное ускорение

Имея уравнение скорости как функции расстояния:

$$v^2 = -w + \frac{w(a+p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2},$$

нетрудно получить и аналогичное уравнение гравитационного ускорения.
Ускорение равно производной по расстоянию половины квадрата скорости:

$$g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-w + \frac{w(a+p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2}\right),$$

то есть,

$$g = -\left(\frac{w(a+p)}{2r^2} + \frac{L^2 - wap}{r^3}\right),$$

в согласии с теоремой Ньютона о движении тел по подвижным орбитам [3].
(Знак минус указывает здесь на направление ускорения, и может быть отброшен, если нас интересует только абсолютная величина ускорения.)

II. Динамика

Все полученные выше закономерности кинематические, в них встречаются только расстояние, время, скорость и ускорение, и не встречаются масса, сила или энергия. Чтобы из кинематической теории получить динамическую физическую теорию, требуется динамические параметры каким-либо образом связать с кинематическими. Нет никакого правила, которое предписывало бы, как именно это надо сделать, кроме требования, чтобы полученная теория соответствовала действительности.

1. Классическая динамика

В частности, если кинематическому выражению гравитационного ускорения поставить в соответствие выражение гравитационного ускорения классической теории тяготения:

$$\frac{w(a+p)}{2r^2} + \frac{L^2 - wap}{r^3} = \frac{\mathrm{G}M}{r^2},$$

то, приравнивая коэффициенты одинаковых степеней r,

$$\frac{w(a+p)}{2} = \mathrm{G}M, \quad L^2 - wap = 0,$$

получим:

$$w = \frac{2\mathrm{G}M}{a+p}, \quad L = \sqrt{wap} = \sqrt{f\mathrm{G}M}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения нашей кинематической теории, получим известные из классической теории тяготения закономерности движения в центральном поле тяготения:

$$v = \sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a+p}\right)},\ T = \pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2\mathrm{G}M}},\ r = \frac{f}{1+e\cos\varphi},\ \Delta\varphi = 0, \text{ и др.}$$

2. Модифицированная динамика

Однако классическая теория тяготения, возможно, не вполне соответствует действительности. Перигелий орбит планет, и в особенности перигелий орбиты Меркурия, по неизвестной причине, будто бы, аномально (т.е. в противоречии с теорией) смещается [4].

Если аномальное смещение действительно существует, то проблему можно решить, связав динамические параметры с кинематикой по-другому, например, так:

$$\frac{w(a+p)}{2r^2}+\frac{L^2-wap}{r^3}=\frac{\mathrm{G}M}{r^2}+\frac{6\mathrm{G}^2M^2}{c^2r^3},$$

где c – скорость света.

В построенной на такой связи модифицированной динамической теории движения в центральном поле смещение перицентра траектории будет равно:

$$\Delta\varphi=2\pi\left(\sqrt{1+\frac{6\mathrm{G}M}{c^2f}}-1\right)\approx 2\pi\frac{3\mathrm{G}M}{c^2f}.$$

Последняя формула уже не раз появлялась в истории физики, как

$$\Delta\varphi=\frac{6\pi\mathrm{G}M}{c^2A\left(1-e^2\right)},$$

где A – большая полуось орбиты, и $A\left(1-e^2\right)=f$.

Для смещения перигелия Меркурия формула даёт значение 43" в столетие, соответствующее «наблюдаемому» аномальному смещению планеты. Считается, что формула пригодна и для других планет Солнечной системы, хотя в этом случае совпадение уже не такое хорошее.

В последнее время, однако, появились сомнения в достоверности аномального смещения перигелия планет. «В наблюдаемом смещении перигелия Меркурия помимо среднего имеются колебательные составляющие, суммарная амплитуда которых достигает 20″, с периодами от нескольких лет до нескольких десятков лет. Из-за наличия этих составляющих при вычислении среднего смещения по данным наблюдений на интервалах в десятки и даже сотни лет относительная погрешность может быть сопоставима с указанной выше величиной в 2,5%. Поэтому утверждения о том, что наблюдаемое смещение перигелия Меркурия не объясняется полностью в рамках классической механики, нельзя признать строго обоснованными» [5].

III. Примеры

1. Классическая динамика

Пример 1. В учебном пособии [1] на стр. 17 приведена задача:

> Баллистический снаряд запускается вертикально вверх с поверхности Земли с начальной скоростью, модуль которой равен круговой скорости для предельно низкой орбиты (т. е. первой космической скорости): $v_0 = v_1 = \sqrt{gR}$.
> Сколько времени продолжается полет снаряда от пуска до падения на Землю?

Приведённое там же решение, непрямое и излишне сложное. С помощью уравнения орбитальной скорости и интеграла времени как функции расстояния от центра тяготения задача решается в лоб, без всяких ухищрений.

1. Вертикальная траектория конечной высоты – это вырожденная эллиптическая орбита, перигей которой совпадает с центром тяготения, т.е. с центром Земли. Следовательно, для перигея орбиты имеем значение $p = 0$.

2. Приравняв орбитальную скорость на поверхности Земли, т.е. на расстоянии R от центра, к начальной скорости, получим уравнение

$$\sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\mathrm{G}M}{R}} ,$$

из которого для апогея получаем значение $a = 2R$.

3. Зная параметры орбиты, продолжительность полёта (подъёма с $r = R$ до $r = 2R$ и падения обратно на Землю) можно вычислить с помощью интеграла времени:

$$t = 2\int_R^{2R} \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\,\mathrm{d}r .$$

Записав решение уже знакомого нам интеграла, имеем:

$$t = 2\sqrt{\frac{a+p}{2\mathrm{G}M}}\left(\frac{a+p}{2}\arccos\frac{a+p-2r}{a-p} - \sqrt{(a-r)(r-p)}\right)\Bigg|_R^{2R} ,$$

откуда получаем следующий результат:

$$t = (\pi + 2)\sqrt{\frac{R^3}{\mathrm{G}M}} .$$

Сравнивая это выражение с периодом обращения,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mathrm{G}M}} ,$$

получим, в согласии с оригинальным решением:

$$t = \frac{\pi + 2}{2\pi}T = 0{,}82\,T .$$

Пример 2. Задача двух тел

> Тела массой 1 и 2 кг обращаются вокруг их общего центра масс так, что минимальное расстояние между ними равно 1 м, а максимальное – 2 м.
>
> Найти период обращения тел, угловые и линейные скорости тел, как в относительной системе отсчета, так и в системе центра масс, и построить траектории движения тел в обеих системах отсчёта.

В данном случае массы тел сопоставимы по величине, и задача, вообще говоря, не является задачей о движении в центральном поле тяготения, но сводится к ней [6].

1. Период обращения

В относительной системе отсчёта, связанной с одним из тел, другое тело обращается вокруг первого так, как будто оно движется в центральном поле тела суммарной массы:

$$M = m_1 + m_2 .$$

Период обращения не зависит от системы отсчёта, и в обеих системах отсчёта равен:

$$T = \pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2\mathrm{G}M}} = \pi\sqrt{\frac{(2+1)^3}{2\mathrm{G}(1+2)}} = 815770{,}947 \text{ с} = 9{,}442 \text{ дней.}$$

2. Угловая скорость тел

Угловая скорость периферийного тела в относительной системе отсчёта равна:

$$\omega = \frac{L}{r^2} = \frac{\sqrt{f\mathrm{G}M}}{r^2} = \frac{2\sqrt{\mathrm{G}}}{r^2} .$$

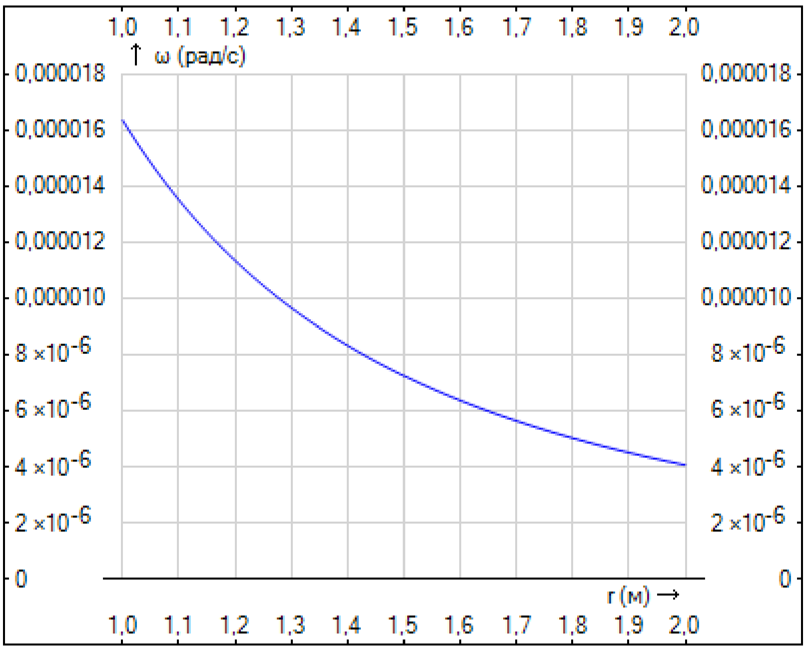


Рис. 1. Угловая скорость тела как функция расстояния в интервале [p, a].

Угловая скорость изменяется от максимальной в перицентре траектории до минимальной в апоцентре траектории:

$$\omega_{\max} = \omega(p) = 2\sqrt{\mathrm{G}} = 16{,}339 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с},$$

$$\omega_{\min} = \omega(a) = \frac{\sqrt{\mathrm{G}}}{2} = 4{,}085 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с}.$$

В системе центра масс угловая скорость обоих тел одинакова, и та же, что у периферийного тела в относительной системе отсчёта. Имеются в виду угловые скорости в один и тот же момент времени, или при одном и том же, угловом, положении на орбите. Но поскольку расстояния от центра в названных случаях разные, то уравнения угловой скорости как функции расстояния будут в них разными. Сделав в уравнении угловой скорости в относительной системе отсчёта замены

$$r = \frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1 \quad \text{и} \quad r = \frac{m_1 + m_2}{m_1} r_2,$$

получим уравнения угловой скорости как функции расстояния в системе центра масс:

$$\omega_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{\sqrt{f\mathrm{G}M}}{r_1^2} = \frac{8\sqrt{\mathrm{G}}}{9r_1^2}, \quad \omega_2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{\sqrt{f\mathrm{G}M}}{r_2^2} = \frac{2\sqrt{\mathrm{G}}}{9r_2^2}.$$

Сделав же замену

$$r = \frac{f}{1 + e\cos\varphi},$$

мы получим уравнение угловой скорости как функцию полярного угла φ, общее для всех трёх случаев – периферийного тела в относительной системе отсчёта, и обоих тел в системе центра масс:

$$\omega = \frac{(1 + e\cos\varphi)^2 \sqrt{f\mathrm{G}M}}{f^2} = \frac{(3 + \cos\varphi)^2 \sqrt{\mathrm{G}}}{8}.$$

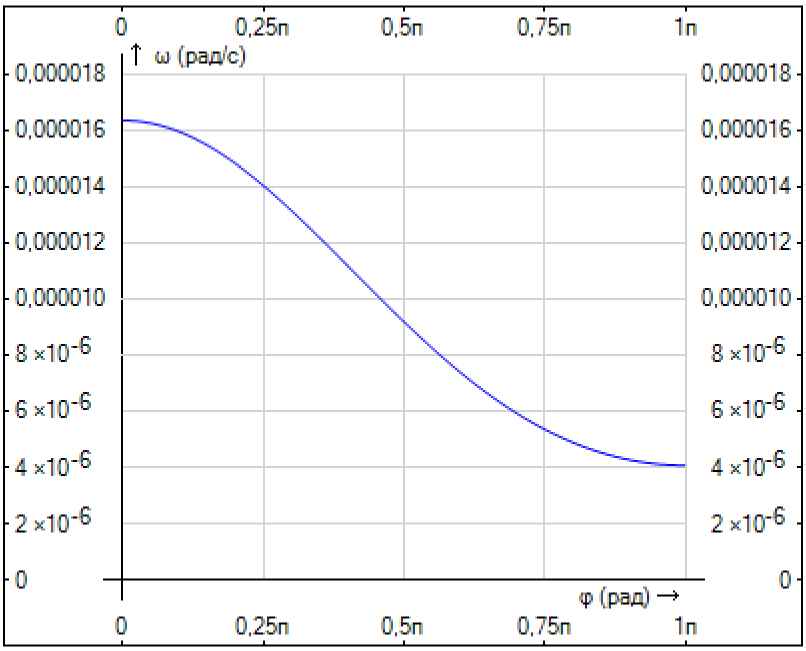


Рис. 2. Угловая скорость тел как функция полярного угла φ в интервале [0, π].

3. Скорости тел

3.1. Скорость тела в относительной системе отсчёта

Скорость периферийного тела относительно центрального равна:

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a+p}\right)} = \sqrt{2G(1+2)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2+1}\right)} = \sqrt{6G\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{3}\right)}.$$

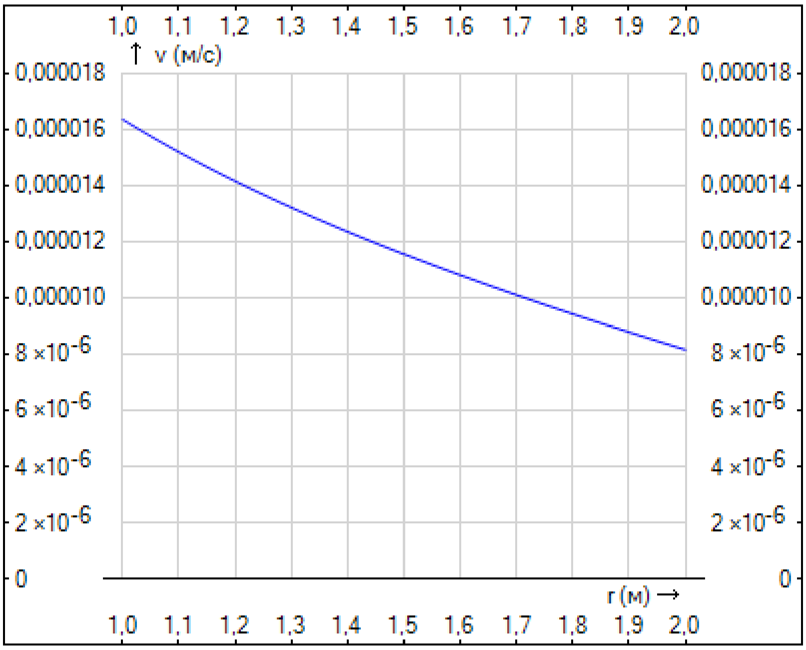


Рис. 3. Скорость тела в относительной системе отсчёта в интервале [p, a].

Скорость изменяется от максимальной в перицентре траектории до минимальной в апоцентре траектории:

$$v_{\max} = v(p) = 2\sqrt{G} = 16{,}339 \cdot 10^{-6} \text{ м/с},$$

$$v_{\min} = v(a) = \sqrt{G} = 8{,}169 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}.$$

3.2. Скорости тел в системе центра масс

Расстояния тел от центра в системе центра масс связаны с расстоянием между телами, или расстоянием от центра в относительной системе отсчёта, соотношениями:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r,$$

Вследствие этого орбиты тел в системе центра масс подобны орбите тела в относительной системе отсчёта, и отличаются только масштабом.
Поэтому параметры орбиты, имеющие размерность длины, в одной системе отсчёта, могут быть получены из параметров орбиты в другой системе отсчёта с помощью масштабного коэффициента, как в равенствах выше. В частности, это касается апоцентра, перицентра и фокального параметра орбиты, но также справедливо и для скорости тела, так как скорость это расстояние, проходимое в единицу времени.

Уравнения скорости тел в системе центра масс можно получить разными способами.

Способ 1.

В системе центра масс каждое из тел движется так, как будто оно движется в центральном поле расположенного в центре масс тела, равносильного другому телу [6], тело m_1 – в поле массы M_2, тело m_2 – в поле массы M_1, где

$$M_1 = \frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}, \qquad M_2 = \frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}.$$

Большие оси орбит равны:

$$a_1 + p_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}(a+p), \qquad a_2 + p_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}(a+p).$$

Отсюда, уравнения скорости тел в системе центра масс будут такими:

$$v_1 = \sqrt{2\mathrm{G}M_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{a_1+p_1}\right)} = \frac{4}{3}\sqrt{\mathrm{G}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2}\right)},$$

$$v_2 = \sqrt{2\mathrm{G}M_1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{a_2+p_2}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt{2\mathrm{G}\left(\frac{1}{r_2} - 1\right)}.$$

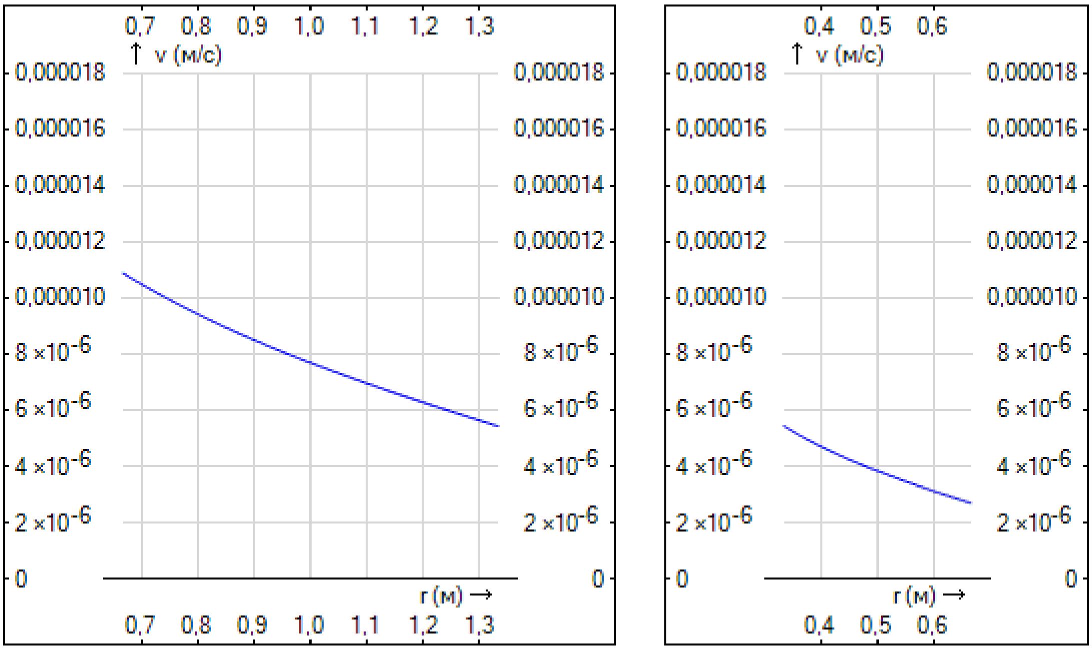


Рис. 4 и 5. Скорости первого и второго тела в системе центра масс, в интервалах [p_1, a_1] и [p_2, a_2], соответственно.

Расстояния перицентра и апоцентра орбит здесь равны:

$$p_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}p = \frac{2}{3} \text{ м}, \qquad a_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}a = \frac{4}{3} \text{ м};$$

$$p_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}p = \frac{1}{3} \text{ м}, \qquad a_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}a = \frac{2}{3} \text{ м}.$$

Для максимальных и минимальных скоростей тел в системе центра масс имеем:

$$v_{1\,\max} = v_1(p_1) = \frac{4}{3}\sqrt{\mathrm{G}} = 10{,}892\cdot 10^{-6}\ \text{м/с},$$

$$v_{1\,\min} = v_1(a_1) = \frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{G}} = 5{,}446\cdot 10^{-6}\ \text{м/с},$$

$$v_{2\,\max} = v_2(p_2) = \frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{G}} = 5{,}446\cdot 10^{-6}\ \text{м/с},$$

$$v_{2\,\min} = v_2(a_2) = \frac{1}{3}\sqrt{\mathrm{G}} = 2{,}723\cdot 10^{-6}\ \text{м/с}.$$

Способ 2.

Преобразуем уравнение скорости в относительной системе отсчёта,

$$v = \sqrt{6\mathrm{G}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{3}\right)},$$

в уравнения скорости для каждого из тел в системе центра масс. Сделав в нём замены

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_2} v_1 \quad \text{и} \quad r = \frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1,$$

получим для скорости первого тела уравнение:

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{6\mathrm{G}\left(\frac{m_2}{(m_1 + m_2) r_1} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{4}{3}\sqrt{\mathrm{G}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2}\right)}.$$

Аналогично для скорости второго тела получим:

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{6\mathrm{G}\left(\frac{m_1}{(m_1 + m_2) r_2} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt{2\mathrm{G}\left(\frac{1}{r_2} - 1\right)}.$$

4. Траектории тел

4.1. Траектория тела в относительной системе отсчёта

Траектория движения тела в центральном поле тяготения в полярной системе координат (r, φ) даётся уравнением:

$$r = \frac{f}{1 + e\cos(\varphi)}.$$

В нашем случае

$$e = \frac{a - p}{a + p} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad f = \frac{2ap}{a + p} = \frac{4}{3},$$

и уравнение траектории тела, после упрощения, будет таким:

$$r = \frac{4}{3 + \cos(\varphi)}.$$

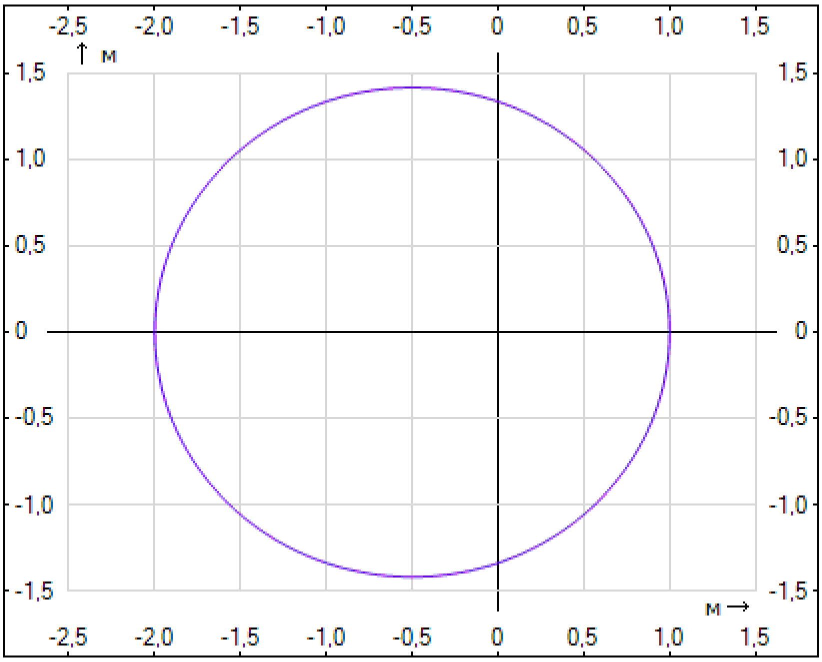


Рис. 6. Траектория тела в относительной системе отсчёта.

4.2. Траектории тел в системе центра масс

Сделав в уравнениях $r_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} r$ и $r_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} r$ замену $r = \dfrac{4}{3 + \cos(\varphi)}$, получим уравнения траектории, корректные для каждого из тел по отдельности. Однако учитывая, что тела движутся совместно в противофазе, со сдвигом на 180°, начальный угол в одном из уравнений, например, втором, следует сдвинуть на 180°. В итоге получим для траекторий тел следующие уравнения:

$$r_1 = \frac{8}{9 + 3\cos(\varphi)}, \qquad r_2 = \frac{4}{9 + 3\cos(\varphi + \pi)}.$$

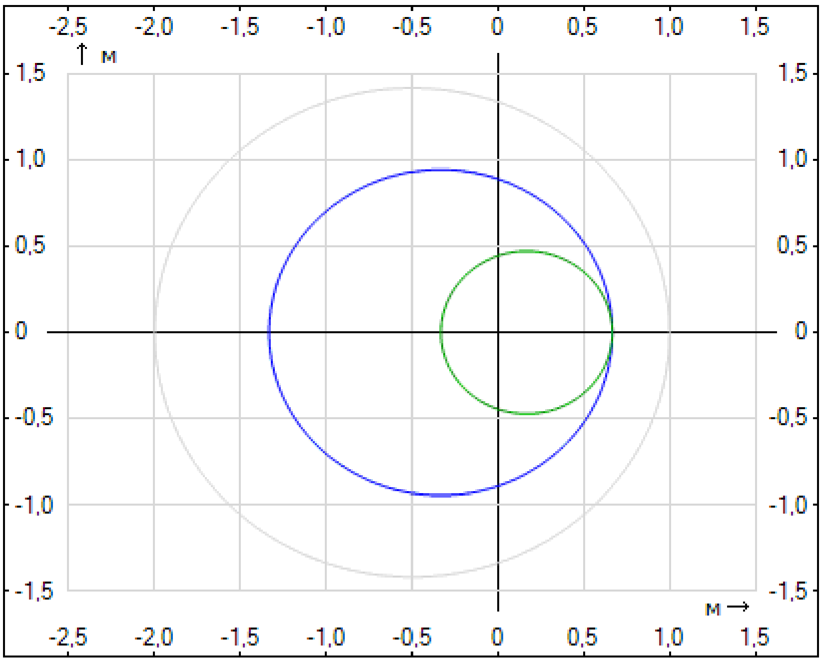


Рис. 7. Траектории тел в системе центра масс.

Пример 3. Ещё одна задача двух тел

В 2015 году нтернет-журнал «Науковедение» опубликовал статью под названием «Метод решения задачи двух тел». Авторы статьи утверждают в ней, что «общая задача двух тел не решена до сих пор, а решена только частная задача двух тел (задача Кеплера), т.е. движение планеты вокруг неподвижного Солнца и тому подобное», и попытались предложить свой метод решения задачи двух тел. Попытка получилась неудачной. Как само утверждение, так и предложенный авторами метод, неверны.

Свой метод авторы продемонстрировали на следующем примере:

> «Рассмотрим две материальные точки m_1 и m_2. Массы которых примем $m_1 = 1{,}0\cdot 10^{21}$ кг и $m_2 = 0{,}5\cdot 10^{21}$. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2. Расстояние между точками $r = 3{,}0\cdot 10^9$ м. Величины начальных скоростей $v_1 = 1$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Векторы скоростей антипаралельны и расположены в плоскости *xy*».

Нужно сказать, что такая постановка задачи не вполне корректна. С одной стороны, данные задачи отчасти избыточны, а с другой стороны, для однозначного решения их недостаточно. В частности, задание скоростей обоих тел избыточно. На деле достаточно скорости лишь одного из тел, так как отношения скоростей тел в системе центра масс обратны отношению масс тел. Задания же только расстояния между телами для единственности решения недостаточно. Нужно знать ещё и положение тел на орбите при заданном расстоянии. Указания, что скорости тел «антипараллельны», здесь недостаточно. Скорости тел будут антипараллельны в любой фазе движения.

Применяя свой метод, авторы получили в системе центра масс такие орбиты:

$$r_1 = \frac{f_1}{1+e_1\cos(\varphi)} = \frac{0{,}15\cdot 10^8}{1-0{,}985\cos(\varphi)}, \quad r_2 = \frac{f_2}{1+e_2\cos(\varphi)} = \frac{1{,}79\cdot 10^8}{1-0{,}641\cos(\varphi)}.$$

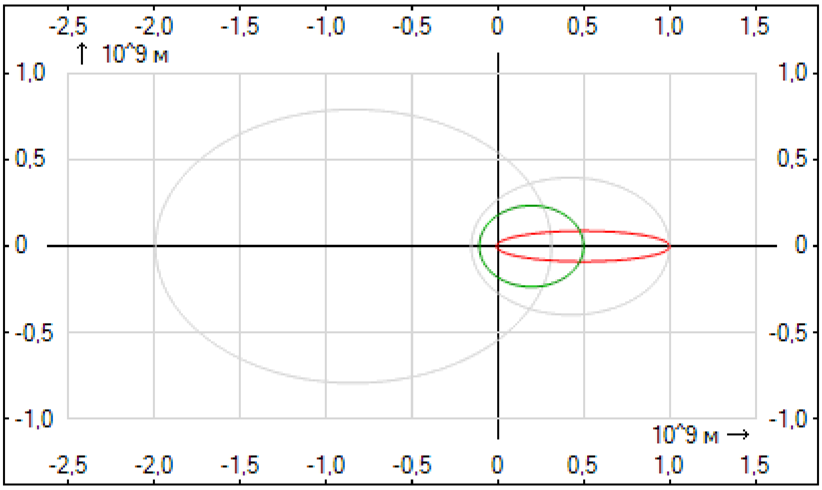


Рис. 8. Траектории тел в системе центра масс по «методу».

Очевидно, что это решение неверно. Эксцентриситеты орбит должны быть равными. В задаче двух тел все три орбиты, периферийного тела в относительной системе отсчёта, и обоих тел в системе центра масс, подобны и отличаются только масштабом. Странно также, что авторы не заметили, что при движении по таким орбитам тела никогда не окажутся на заданном в условии задачи расстоянии $3{,}0\cdot 10^9$ метров друг от друга.

Правильное решение

1. Вследствие равенства

$$r = r_1 + r_2,$$

расстояния в относительной системе отсчёта равны сумме аналогичных расстояний в системе центра масс. Это справедливо для параметров имеющих размерность длины, таких как апоцентр, перицентр и фокальный параметр орбиты, но верно также и для скорости тел, как расстояния в единицу времени.

Отсюда, скорость тела в относительной системе отсчёта, в момент нахождения тел на заданном расстоянии $r = 3{,}0 \cdot 10^9$ м, равна:

$$v = v_1 + v_2 = 3 \text{ м/с}.$$

Масса условного центра тяготения в относительной системе отсчёта равна:

$$M = m_1 + m_2 = 1{,}5 \cdot 10^{21} \text{ кг}.$$

Подставив эти значения в уравнение орбитальной скорости,

$$v = \sqrt{2\mathrm{G}M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a+p}\right)},$$

получим уравнение, в котором неизвестен один параметр, $a + p$, большая ось орбиты. Решив уравнение, получим для большой оси орбиты в относительной системе отсчёта значение:

$$a + p = 3{,}468 \cdot 10^9 \text{ м}.$$

2. На этом однозначность решения заканчивается. Далее решение становится неоднозначным, поскольку либо апоцентр, либо перицентр, может быть задан, из определённого интервала, произвольно. В частности, апоцентр может принять любое значение из интервала $3{,}0 \cdot 10^9 - 3{,}468 \cdot 10^9$ м.

Положив, например, апоцентр равным

$$a = 3{,}0 \cdot 10^9 \text{ м},$$

для перицентра получим значение

$$p = 4{,}68 \cdot 10^8 \text{ м}.$$

Откуда получим

$$e = \frac{a-p}{a+p} = 0{,}730 \quad \text{и} \quad f = \frac{2ap}{a+p} = 8{,}091 \cdot 10^8 \text{ м},$$

и следующее уравнение траектории в относительной системе отсчёта:

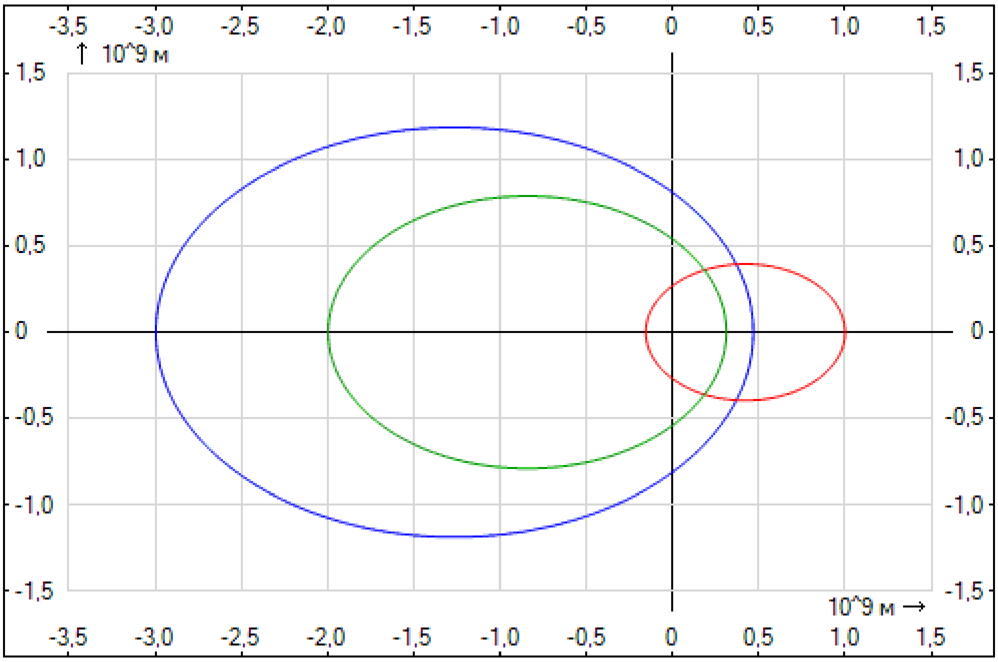
$$r = \frac{8{,}091 \cdot 10^8}{1 + 0{,}73\cos(\varphi)}.$$

Используя соотношения

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r,$$

и сдвинув фазу в первом уравнении на 180°, в системе центра масс получим уравнения:

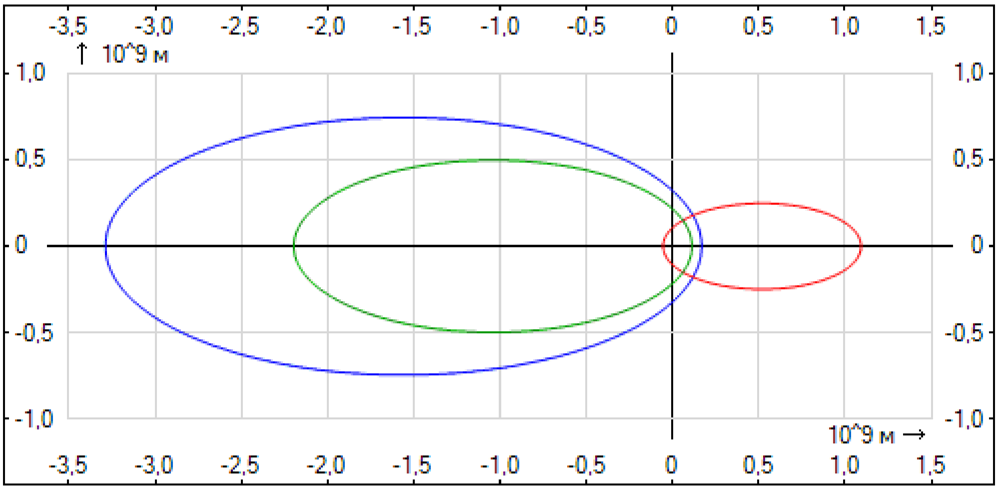
$$r_1 = \frac{2{,}697 \cdot 10^8}{1 + 0{,}73\cos(\varphi + \pi)}, \qquad r_2 = \frac{5{,}394 \cdot 10^8}{1 + 0{,}73\cos(\varphi)}.$$



[Рис. 9](#). Траектории тел в обеих системах отсчёта при $a = 3{,}0 \cdot 10^9$ м.

На рисунке синим цветом показана траектория тела в относительной системе отсчёта, а красным и зелёным – траектории первого и второго тела, соответственно, в системе центра масс.

Положив значение апоцентра равным $3{,}3 \cdot 10^9$ м, получим другое решение:



[Рис. 10](#). Траектории при $a = 3{,}3 \cdot 10^9$ м.

2. Модифицированная динамика

> «OJ 287 представляет собой двойную систему чёрных дыр, бóльшая из которых имеет массу равную 18 миллиардам масс Солнца, фактически массу небольшой галактики. Меньший компаньон весит как 100 миллионов масс Солнца. Период его обращения составляет 12 лет».
> Этот объект интересен своим огромным смещением перицентра орбит, который составляет около 39 градусов за один период обращения. Такое смещение, в отличие от смещения перигелия Меркурия, можно показать графически.

Массы тел системы сравнимы по величине, поэтому мы имеем здесь задачу двух тел, сводящуюся к задаче движения в центральном поле. Решим её в относительной системе отсчёта, связанной с одним из тел. Составим систему уравнений:

$$\left\{ T = \pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2GM}},\ \ \Delta\varphi = 2\pi\left(\sqrt{1+\frac{6GM}{c^2 f}}-1\right) \right\},\ \text{где}\ M = m_1 + m_2\ \text{ и }\ f = \frac{2ap}{a+p}.$$

Подставляя численные данные и решая систему относительно a и p, получим следующие параметры орбиты одного компаньона относительно другого:

$$a = 3{,}730\cdot 10^{15},\ \ p = 3{,}876\cdot 10^{14},\qquad f = 7{,}022\cdot 10^{14},\ \ e = 0{,}812,\ \ i = 0{,}902.$$

Построив график уравнения

$$r = \frac{7{,}022\cdot 10^{14}}{1-0{,}812\sin(0{,}902\,\varphi)}$$

в интервале $[0,\ 22\pi]$ получим такую траекторию:

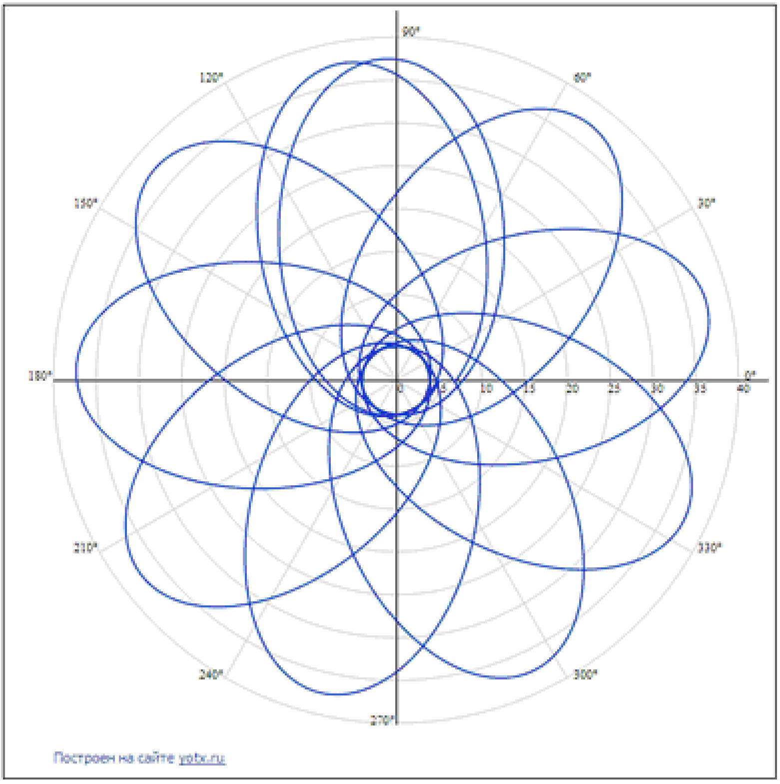


Рис. 11. Орбита спутника чёрной дыры OJ 287.
Смещение составляет 39° за (двенадцатилетний) период.

Заключение

Получены ранее неизвестные общие кинематические уравнения движения в центральном поле тяготения, обобщающие законы Кеплера, из которых простой подстановкой выражений остаточной скорости и момента скорости, получаются классические динамические уравнения движения в центральном поле тяготения. Классическая теория тяготения упрощается. Как и должно быть.

Ссылки

1. Бутиков Е. И. Закономерности кеплеровых движений. 2006.
2. Г. Б. Двайт. Таблицы интегралов. Издание второе, исправленное. М.: Наука, 1966.
3. Исаак Ньютон. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. О движении тел по подвижным орбитам и о перемещении апсид. Предложение XLIV Теорема XIV.
4. Н. Т. Роузвер. Перигелий Меркурия. От Леверье до Эйнштейна. М.: Мир, 1985.
5. Амелькин Н. И. О прецессии орбиты Меркурия. Доклады академии наук, 2019, том 489, № 6, с. 570–575.
6. Браун В. Г. Близкодействие и задача двух тел. 2020.