Франц Герман

Тайны листа Мёбиуса

KIW – Gesellschaft e. V., Dresden, BRD,
E-Mail: kiw_dd@arcor.de hanzmannferr@mail.ru

Лист Мёбиуса представляет собой геометрический курьёз: поверхность, имеющую лишь одну сторону и один край

Мартин Гарднер

Эта небольшая работа будет посвящена одному из популярнейших в математике объекту - листу Мёбиуса.

О листе Мёбиуса написано так много популярных статей и серьёзных исследований, что мы уверены - наш читатель очень хорошо представляет себе, что такое лист Мёбиуса и как просто можно сделать лист Мёбиуса в домашних условиях.

И всё-таки для неискушённого читателя остаётся ещё много тайн и загадок, которые на первый взгляд скрыты. В этой главе мы раскроем одну из самых главных тайн листа Мёбиуса. Это тайна, проливает свет на природу листа Мёбиуса, как геометрического объекта.

Рассмотрим полуплоскость α, которая равномерно вращается вокруг прямой ***x-x***, являющейся границей этой полуплоскости,.

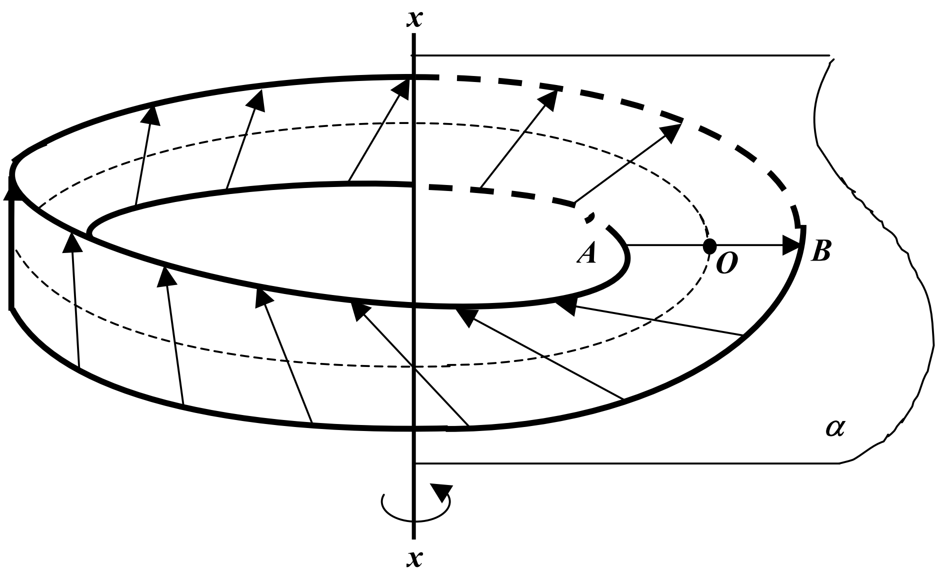

Рис. 1

Взяв в плоскости α произвольную точку ***O***, проведём через неё вектор $\overrightarrow{AB}$, так, чтобы точка ***O*** была его серединой. Когда наша полуплоскость совершает полный оборот вокруг оси ***x-x***, точка ***O*** опишет в пространстве некоторую окружность, радиусом равным расстоянию от точки ***O*** до оси ***x-x***.

Теперь предположим, что вектор $\overrightarrow{AB}$, в то время, как полуплоскость равномерно вращается вокруг оси ***x-x***, также равномерно вращается вокруг точки $\boldsymbol{O}$, находясь всё время в полуплоскости α, но со скоростью вращения в два раза меньшей чем вращение полуплоскости. Тогда, когда точка $\boldsymbol{O}$ вернётся в своё исходное положение, вектор $\overrightarrow{AB}$ также совпадёт с исходной позицией только направление его поменяется на противоположное. Фигура, которую опишет вектор $\overrightarrow{AB}$, во время своего движения, и будет, очевидно, листом Мёбиуса (Рис.1).

Тот, кто изберёт своей профессией математику, обязательно будет изучать такой предмет, как дифференциальная геометрия. Это, бесспорно, один из красивейших разделов математики. Используя методы дифференциальной геометрии, можно найти уравнение листа Мёбиуса, который мы только что описали. Также при помощи методов дифференциальной геометрии, можно провести и исследование этой поверхности. Изучение дифференциальной геометрии не входит в наши планы. Мы ограничимся здесь только одним фактом, который читатель должен принять наверу.

Предположим, что у нас в руках имеется фигура, которую мы только что мысленно построили и которая изображена на Рис.1. Причём, сделана эта фигура из какого-то материала, который можно разрезать ножницами. Разрежем это тело вдоль вектора $\overrightarrow{AB}$. Оказывается, что как бы мы не пытались, полученную полоску расправить и уложить на плоскости стола, так чтобы все её точки пришли в соприкосновение с плоскостью стола, нам это не удастся сделать.

При попытке это сделать, всегда будут получаться складки и разрывы нашей полосы. В чём же дело?

Одним из главных понятий, которое вводится и изучается в курсе дифференциальной геометрии, является кривизна поверхности. Если бы кривизна поверхности стола совпадала с кривизной поверхности нашей фигуры, то уложить последнюю на стол не составило бы труда.

В геометрии существует два таких элементарных тела, разрезав которые, можно расстелить (развернуть) их на плоскости стола. Это цилиндр и конус (Рис.2).

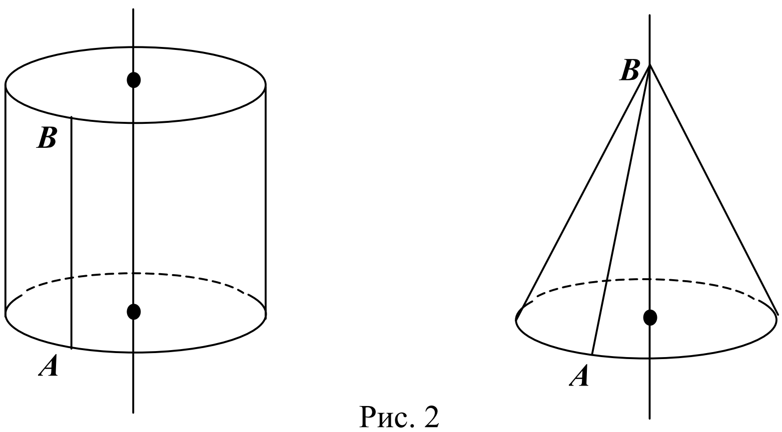

Рис. 2

Мы думаем, что читателю хорошо знакомы эти фигуры. Здесь мы будем говорить только о правильных цилиндрах и конусах, т.е. таких фигурах, в основании которых лежит окружность и всякая образующая цилиндра перпендикулярна плоскости основания, а высота, опущенная из вершины конуса, опирается на центр окружности основания.

Разрезав цилиндр, например, вдоль образующей ***AB*** мы можем развернуть его в прямоугольник, который прекрасно расстелется на плоскости стола.

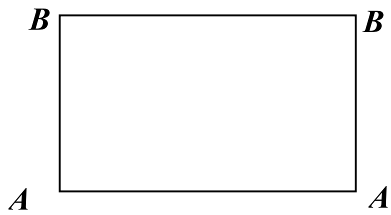

Рис. 3

Если разрезать конус вдоль одной из его образующих, например ***AB***, то развернув его, мы получим сектор круга с радиусом ***AB***, который тоже запросто укладывается на столе.

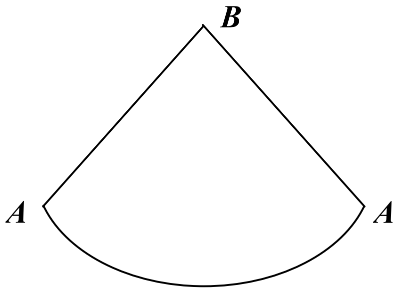

Рис. 4

Кривизна поверхности цилиндра и конуса совпадает с кривизной поверхности стола.

Теперь снова вернёмся к листу Мёбиуса.

Возьмём достаточно длинную полоску бумаги в виде прямоугольника.

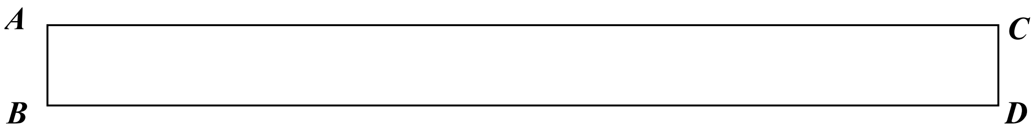

Рис. 5

Слегка перекрутив её, таким образом, чтобы можно было склеить концы полоски так, чтобы точка ***A*** совпала с точкой ***B***, а точка ***D*** - с точкой ***C***, получим лист Мёбиуса.

Совершенно очевидно, что снова, разрезав место склейки, этот лист Мёбиуса прекрасно развернётся в полоску бумаги и «удобно» расстелется на поверхности стола. Это говорит о том, что природа листа Мёбиуса, который изображён на Рис.1 и того, который мы только что сами изготовили, различна. Но возникает вопрос: ведь мы знаем, что существует только две фигуры, разрезав которые, можно развернуть их на плоскости - это цилиндр и конус. И вдруг - лист Мёбиуса?

Математика таит в себе много тайн, на первый взгляд которые представляются почти чудом. Но каждое математическое чудо в конце концов, рано или поздно получает своё объяснение.

Так как же быть с листом Мёбиуса? Ответ может быть только один. Склеенный из полоски бумаги лист Мёбиуса по своей геометрической природе представляет фигуру, собранную из кусочков поверхностей цилиндра либо конуса, либо и того и другого вместе взятых. В этом и заключается геометрическая тайна природы (внутренней сути) листа Мёбиуса, склеенного из бумаги.

Мы думаем, что для многих читателей этот факт явится приятной неожиданностью.

Сейчас мы намерены раскрыть эту тайну, но тот читатель, кто захочет самостоятельно постичь эту истину, пусть отложит на время чтение книги и попытается сам провести исследования. Для тех же, кто следует с нами далее, расскажем в чём суть решаемой нами задачи.

Мы знаем, что цилиндр разворачивается в прямоугольник, а конус - в сектор круга. Комбинируя различные прямоугольники и сектора, необходимо получить развёртку таким образом, чтобы в неё можно было вписать прямоугольник, который при склейке всей фигуры превращался бы в лист Мёбиуса.

Не будем томить нетерпеливого читателя и сразу объявим, что наш лист Мёбиуса прекрасно располагается на поверхности фигуры, склеенной из четырёх полуконусов, плавно переходящих друг в друга. Два полуконуса имеют угол при вершине в 30° и два полуконуса имеют угол при вершине в 60°.

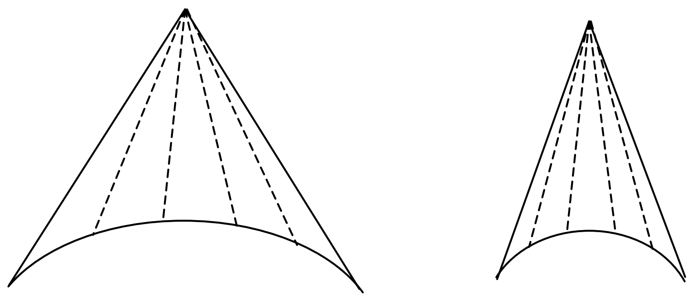

Рис. 6

Попробуйте сложить из этих частей одностороннюю поверхность, т.е. лист Мёбиуса. На Рис.7 показано, как это надо сделать

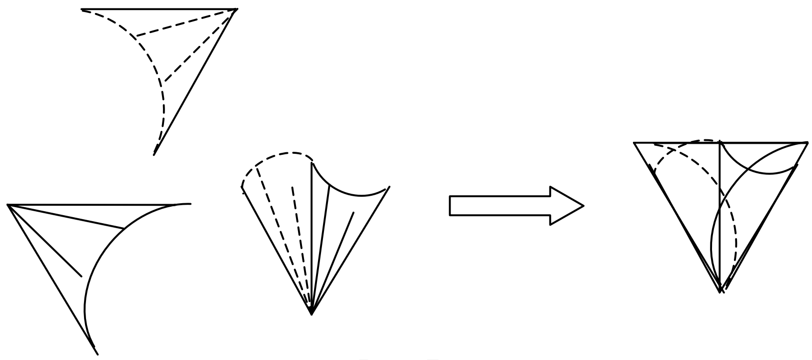

Рис. 7

Покажем, как связаны угол при вершине конуса α и угол при вершине сектора ω, который является развёрткой данного конуса. Будем считать, что длина образующей конуса равна единице.

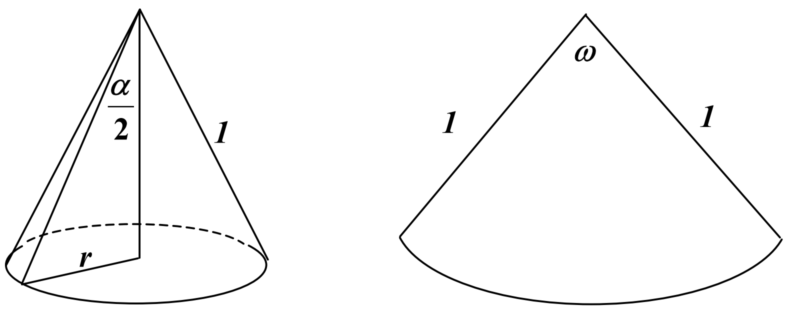

Рис. 8

Согласно обозначениям, показанным на Рис.1, нам надо вывести связь угла α и угла ω.

Радиус окружности основания конуса $\boldsymbol{r = Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, тогда длина окружности основания равна $\boldsymbol{2\pi \cdot Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Развернув конус в сектор, мы должны получить длину дуги сектора равную длине окружности основания. Длина дуги сектора, равна:

$$\boldsymbol{2\pi \cdot 1 \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \omega}.$$

Приравняв эти выражения, мы и получим искомую зависимость:

$$\boldsymbol{\omega = 2\pi \cdot Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

В нашем случае используются только полуконусы, поэтому получаем такую формулу:

$$\boldsymbol{\omega = \pi \cdot Sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \qquad (1)$$

Мы имеем полуконусы двух видов. Один имеет угол при вершине $\boldsymbol{\alpha = 60°}$, другой - $\boldsymbol{\alpha = 30°}$. Подставляя эти значения в формулу (1), находим необходимые значения ω для построения развёрток полуконусов.

$$\boldsymbol{\omega_1 = \pi \cdot Sin\frac{60}{2} = \frac{\pi}{2}},$$

$$\boldsymbol{\omega_2 = \pi \cdot Sin\frac{30}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 46.6°}.$$

Покажем, как выглядит развёртка фигуры, которая изображена на Рис.7 справа, на плоскости (Рис. 9).

Как видим из Рис.9, в развёртку такой фигуры можно вписать прямоугольник. Это и есть та прямоугольная полоска бумаги,из которой мы склеиваем лист Мёбиуса.

Свернув снова эту фигуру, с нанесённой на ней полоской, мы увидим уже лист Мёбиуса, более привычный для нас (Рис. 10).

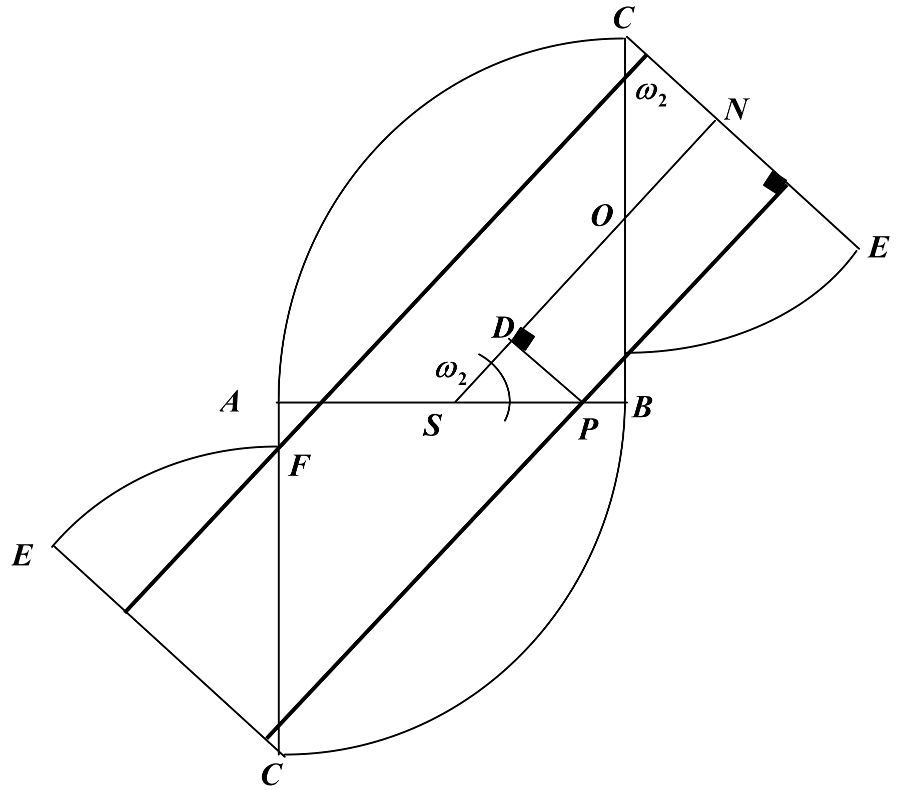

Рис. 9

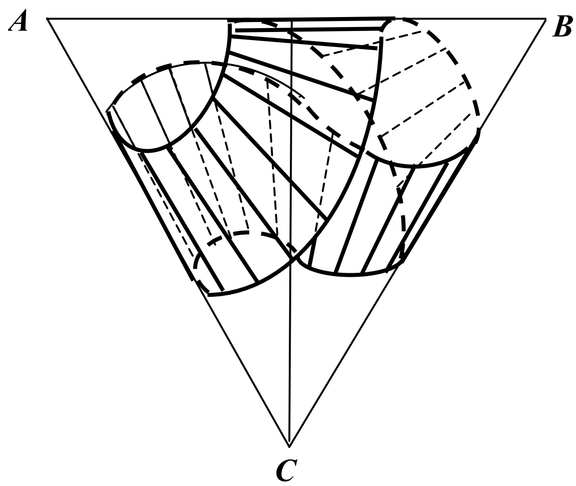

Рис. 10

Имея развёртку такой фигуры (Рис.9), мы можем провести небольшое исследование. А именно, вычислить длину и ширину вписанного в эту развёртку прямоугольника. Обозначим длину прямоугольника – ***L*,** ширину - ***H***.

Перерисуем отдельно необходимый нам фрагмент рисунка 9.

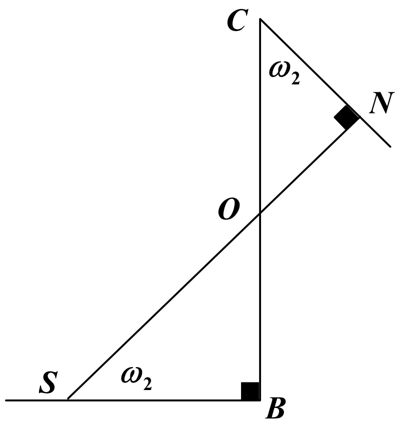

Рис. 11

$$CB = 1; \qquad SB = \frac{1}{2}CB; \quad OC = 1 - \frac{tg(\omega_2)}{2};$$

Треугольник ***OCN*** подобен треугольнику ***OSB*** , поэтому можем записать:

$$\frac{ON}{OB} = \frac{OC}{OS}; \tag{2}$$

$$OS + ON = \frac{1}{2}L; \qquad OS = \frac{1}{2Cos(\omega_2)}; \qquad ON = \frac{1}{2}L - OS;$$

Подставляя полученные значения в пропорцию (2), получаем:

$$\frac{\frac{L}{2} - \frac{1}{2Cos(\omega_2)}}{\frac{tg(\omega_2)}{2}} = \frac{1 - \frac{tg(\omega_2)}{2}}{\frac{1}{2Cos(\omega_2)}}; \qquad \frac{L - \frac{1}{Cos(\omega_2)}}{tg(\omega_2)} = \frac{2 - tg(\omega_2)}{\frac{1}{Cos(\omega_2)}};$$

$$\frac{L \cdot Cos(\omega_2) - 1}{Sin(\omega_2)} = \frac{2Cos(\omega_2) - Sin(\omega_2)}{1}; \qquad L \cdot Cos(\omega_2) - 1 = 2Cos(\omega_2) \cdot Sin(\omega_2) - Sin^2(\omega_2);$$

$$L = \frac{2Cos(\omega_2) \cdot Sin(\omega_2) - Sin^2(\omega_2) + 1}{Cos(\omega_2)} = 2Sin(\omega_2) + Cos(\omega_2);$$

$$L = 2Sin(\omega_2) + Cos(\omega_2); \tag{3}$$

Вычислим ширину ***H***.

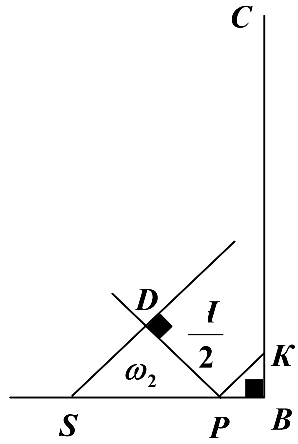

Рис. 12

$$\frac{H}{2SP}=Sin(\omega_2);\qquad PB=\frac{1}{2}-SP;\qquad KB=1-\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \frac{KB}{PB}=tg(\omega_2);$$

$$SP=\frac{H}{2Sin(\omega_2)};\qquad \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{H}{2Sin(\omega_2)}}=tg(\omega_2);\qquad \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot Sin(\omega_2)}{Sin(\omega_2)-H}=tg(\omega_2);$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{Sin(\omega_2)-H}=\frac{1}{Cos(\omega_2)};\qquad \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot Cos(\omega_2)=Sin(\omega_2)-H;$$

$$H=Sin(\omega_2)-\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot Cos(\omega_2).\tag{4}$$

Заметим, что всегда при вычислениях мы полагали длину образующей большого полуконуса равной единице (***BC*=1**).

Как видим из (3) и (4), длина и ширина листа Мёбиуса независимые друг от друга величины.

Однако можно вычислить их предельное отношение.

$$\frac{L}{H}=\frac{2Sin(\omega_2)+Cos(\omega_2)}{Sin(\omega_2)-\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot Cos(\omega_2)}=\xi;\qquad \omega_2=\pi\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};$$

Сделав расчёты, получаем:

$$\frac{L}{H}=\xi\approx 4.$$

В заключение, предлагаем читателю проделать такой эксперимент. Возьмите две полоски бумаги в виде прямоугольника. Одна -**3 x 12** см., другая полоска - **1 x 12** см. (или им пропорциональные).

Раскрасьте узкую полоску в какой-нибудь цвет, например серый, С обеих сторон. Вдоль средней линии широкой полосы нарисуйте с двух сторон дорожку, шириной в 1см. и также раскрасьте с двух сторон в серый цвет.

Рис. 13

Теперь склейте из этих полос два листа Мёбиуса. И вы увидите, как поразительно похожи друг на друга серый лист Мёбиуса из узкой полосы и серый лист Мёбиуса, нарисованный на широкой полосе. О чём это говорит? Это говорит о том, что геометрическая природа обеих листов Мёбиуса, широкого и узкого, одна и та же, т.е. в их основе лежат одинаковые полуконусы. А также – это подтверждает факт независимости длины листа Мёбиуса от его ширины.

И, наконец, последние два слова о листе Мёбиуса. Иногда, в популярных статьях можно встретить мнение, что лист Мёбиуса изобрёл человек. Это не так. У автора этих строк хранится подарок его племянника - обломок морской ракушки, закрученный в виде листа Мёбиуса. Следовательно лист Мёбиуса - это не изобретение человека, а его гениальное открытие.

Рис. 14

Точные построения

(Иллюстрации Светланы Бардиной)