

Франц Герман

Теория векторных функций геометрических преобразований

KIW – Gesellschaft e. V., Dresden, BRD,
E-Mail: kiw_dd@arcor.de hanzmannferr@mail.ru

1. Подобие второго рода. Гомотетия. Осевая симметрия.

Известно, что преобразование подобия второго рода (обозначим через P) представляет собой коммутативную композицию осевой симметрии Σ_{OX} (относительно оси OX) и гомотетии G_O^k , где k - коэффициент подобия.

Известно также, что преобразование P всегда имеет одну неподвижную точку и две, взаимно перпендикулярные неподвижные прямые.

Если в качестве осей декартовых координат выбрать неподвижные прямые преобразования подобия второго рода, то преобразование P можно представить в этих координатах как векторную функцию.

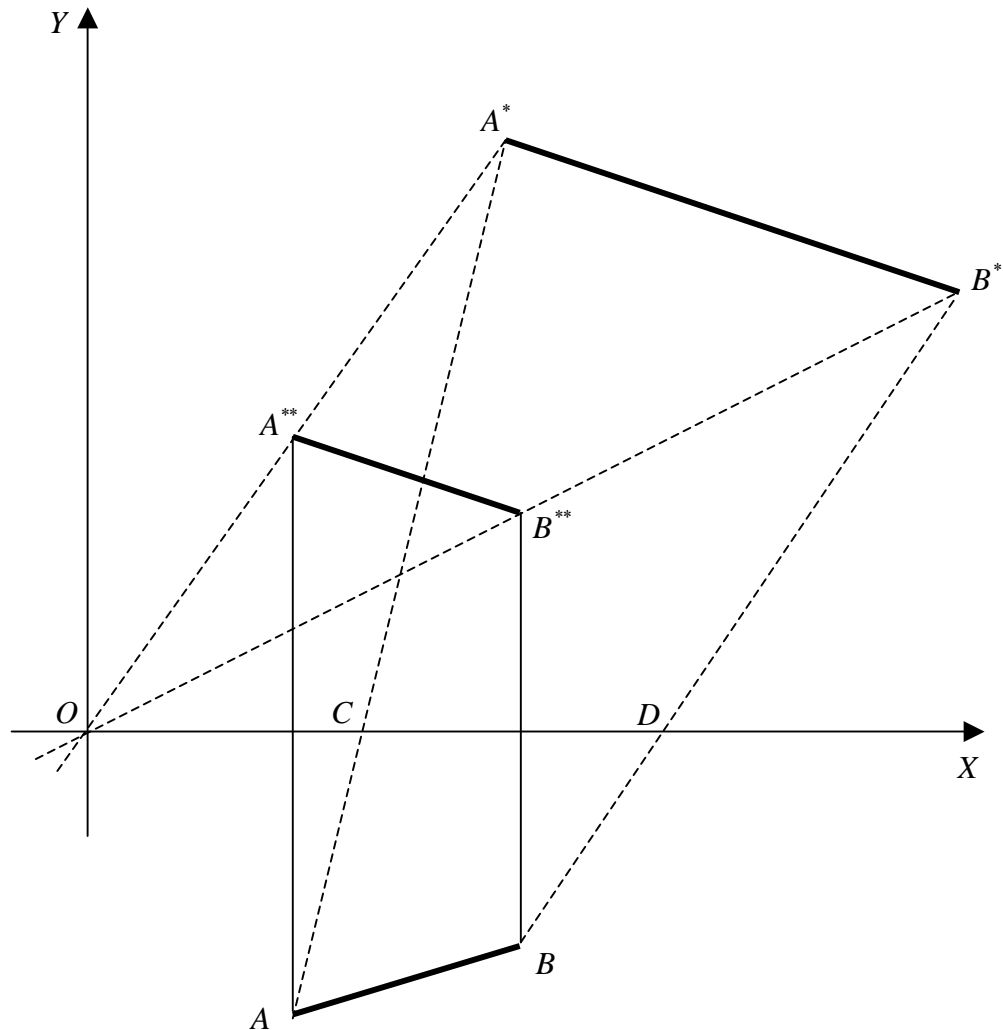


Рис. 1

Покажем на примере, как можно построить такую систему координат, зная две точки образа и две точки праобраза преобразования подобия второго рода.

Пусть $P_2 : A \xrightarrow{P_2} A^*, B \xrightarrow{P_2} B^*$, где $k = 2$ (Рис. 1).

Разделим отрезки AA^* и BB^* точками C и D соответственно, таким образом, что $A^*C = 2 \cdot CA$ и $B^*D = 2 \cdot DB$.

Прямая CD будет первой неподвижной прямой преобразования P_2 .

Далее построим отрезок $A^{**}B^{**}$, как образ отрезка AB при преобразовании осевой симметрии $\Sigma_{CD} : A \xrightarrow{\Sigma_{CD}} A^{**}, B \xrightarrow{\Sigma_{CD}} B^{**}$.

Точка $O \equiv A^*A^{**} \cap CD$ (или $O \equiv B^*B^{**} \cap CD$) будет неподвижной точкой преобразования P_2 .

Примем за ось абсцисс $-OX$, искомой декартовой системы координат, прямую CD , тогда осью ординат $-OY$ будет прямая, перпендикулярная прямой CD и проходящая через точку O .

Таким образом, мы построили инвариантную систему (ИС) декартовых координат преобразования P_2 .

Покажем, как можно в общем виде записать преобразование P_k в (ИС) координат в виде векторной функции.

Пусть $P_k : A \xrightarrow{P_k} A^*$, где $A(x_A; y_A)$, $A^*(x_A^*; y_A^*)$. Но с другой стороны $x_A^* = k \cdot x_A$, $y_A^* = -k \cdot y_A$ (в качестве наглядной иллюстрации здесь можно воспользоваться примером построения преобразования второго рода, показанного на Рис. 1).

Обозначим через \vec{P}_k – векторную функцию преобразования P_k . Т. е. запись $\vec{OA^*} = \vec{OA} + \vec{P}_k$ будем считать равносильной записи $P_k : A \xrightarrow{P_k} A^*$. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{P}_k &= (x_A^* - x_A) \cdot \vec{i} + (y_A^* - y_A) \cdot \vec{j} = (k \cdot x_A - x_A) \cdot \vec{i} + (-k \cdot y_A - y_A) \cdot \vec{j} = \\ &= (k - 1)x_A \cdot \vec{i} - (k + 1)y_A \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

Т. к. в качестве точки $A(x_A; y_A)$ была выбрана произвольная точка, то можем записать в общем виде:

$$\boxed{\vec{P}_k = (k - 1)x \cdot \vec{i} - (k + 1)y \cdot \vec{j}} \quad (1)$$

Пример

Найти векторную функцию преобразования подобия второго рода P_2 и образ A^* для точки $A(2; -1)$ в инвариантной системе координат.

Обозначим начало (ИС) координат через точку O , тогда $\vec{OA} = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j}$.

Векторная функция данного преобразования, согласно формуле (1), будет иметь вид:

$$\vec{P}_2 = (2-1) \cdot 2 \cdot \vec{i} - (2+1) \cdot (-1) \cdot \vec{j} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{OA}^* = \vec{OA} + \vec{P}_2 = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j} + 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} = 4 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$$

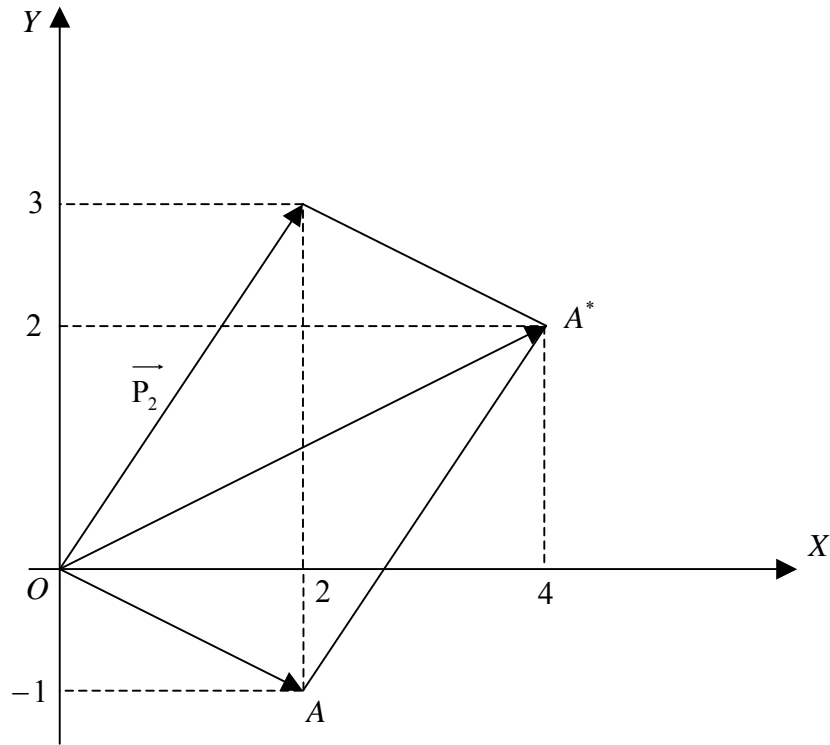


Рис. 2

В дальнейшем все преобразования будем рассматривать в инвариантной для всех \vec{P}_k системе координат XOY .

Обозначим через G_o^k – преобразование гомотетии, относительно начала координат с коэффициентом подобия k .

Пусть $A(x, y) \xrightarrow{G_o^k} A^*(kx, ky)$, тогда

$$\vec{G}_o^k = \vec{OA}^* - \vec{OA} = (kx - x) \cdot \vec{i} + (ky - y) \cdot \vec{j} = (k - 1) \cdot (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j})$$

$$\boxed{\vec{G}_o^k = (k - 1) \cdot (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j})} \quad (2)$$

Аналогично можно представить преобразование осевой симметрии Σ_{OX} , относительно оси OX в виде векторной функции $\vec{\Sigma}_{OX}$.

$$\boxed{\vec{\Sigma}_{OX} = -2 \cdot y \cdot \vec{j}} \quad (3)$$

Обозначим через \oplus операцию композиции двух преобразований. Известно, что:

$$P_k \oplus \Sigma_{OX} \rightarrow G_O^k; \quad (a)$$

$$G_O^k \oplus \Sigma_{OX} \rightarrow P_k; \quad (b)$$

$$P_k \oplus G_O^n \rightarrow P_{kn}; \quad (c)$$

$$P_k \oplus P_n \rightarrow G_O^{kn}; \quad (d)$$

$$G_O^k \oplus G_O^n \rightarrow G_O^{kn}; \quad (e)$$

$$\Sigma_{OX} \oplus \Sigma_{OX} \rightarrow T, \quad (f)$$

где T - тождественное преобразование. Ему в соответствие поставим вектор $\vec{0}$.

Под векторной композицией двух преобразований будем представлять векторное сложение соответствующих векторных функций.

Выведем правила векторных композиций.

Запишем (a) в векторной форме:

$$\vec{G}_O^k = a \cdot \vec{P}_k + b \cdot \vec{\Sigma}_{OX},$$

где a и b некоторые, пока неизвестные нам коэффициенты.

Найдём a и b , используя формулы (1), (2) и (3).

$$(k-1) \cdot (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}) = a \cdot ((k-1) \cdot x \cdot \vec{i} - (k+1) \cdot y \cdot \vec{j}) + b \cdot (-2 \cdot y \cdot \vec{j})$$

В силу этого равенства можем записать такую систему уравнений:

$$\begin{cases} k-1 = a \cdot (k-1) \\ k-1 = -a \cdot (k+1) - 2 \cdot b \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу видим, что $a = 1$.

Из второго уравнения находим b

$$k-1 = -k-1-2 \cdot b; \quad b = -k.$$

Получаем первое правило векторной композиции:

$$P_k \oplus \Sigma_{OX} \rightarrow G_O^k \Rightarrow \vec{G}_O^k = \vec{P}_k - k \cdot \vec{\Sigma}_{OX}.$$

Найдём правило векторной композиции для (b).

$$\vec{P}_k = a \cdot \vec{G}_O^k + b \cdot \vec{\Sigma}_{OX}$$

Из предыдущего правила можно записать:

$$\mathbf{G}_O^k \oplus \Sigma_{OX} \rightarrow P_k \Rightarrow \overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{G}_O^k + k\overrightarrow{\Sigma_{OX}}$$

Найдём правило для (с).

$$\overrightarrow{P_k} = a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{G}_O^n$$

или

$$(kn-1)x \cdot \overrightarrow{i} - (kn+1)y \cdot \overrightarrow{j} = a((k-1)x \cdot \overrightarrow{i} - (k+1)y \cdot \overrightarrow{j}) + b(n-1)(x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j});$$

или в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} kn-1 = a(k-1) + b(n-1) \\ -kn-1 = -a(k+1) + b(n-1) \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим: $2kn = 2ak$, откуда $a = n$

Подставляя полученный результат во второе уравнение, находим $b = 1$. Таким образом:

$$P_k \oplus G_O^n \rightarrow P_{kn} \Rightarrow \overrightarrow{P_{kn}} = n\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G}_O^n$$

Заметим, что $\overrightarrow{P_{kn}} = n\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G}_O^n = k\overrightarrow{P_n} + \overrightarrow{G}_O^k$

Для (d) запишем:

$$\overrightarrow{G}_O^{kn} = a\overrightarrow{P_k} + b\overrightarrow{P_n}, \text{ или}$$

$$(kn-1)(x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j}) = a((k-1)x \cdot \overrightarrow{i} - (k+1)y \cdot \overrightarrow{j}) + b((n-1)x \cdot \overrightarrow{i} - (n+1)y \cdot \overrightarrow{j}), \text{ откуда:}$$

$$\begin{cases} kn-1 = a(k-1) + b(n-1) = ak - a + bn - b \\ kn-1 = -a(k+1) - b(n-1) = -ak - a - bn - b \end{cases}$$

Сложим оба уравнения и разделим на 2, получим: $kn-1 = -(a+b)$. Теперь вычтем из первого уравнение второе, получим: $ak + bn = 0$.

$$\begin{cases} kn-1 = -(a+b) \\ ak + bn = 0 \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений находим a и b :

$$a = \frac{n(kn-1)}{k-n}, \quad b = \frac{k(kn-1)}{k-n}$$

Получаем следующее правило для композиции преобразований (d):

$$P_k \oplus P_n \rightarrow G_o^{kn} \Rightarrow \overrightarrow{G_o^{kn}} = \frac{kn-1}{k-n} \left(n\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_n} \right), \quad k \neq n.$$

Запишем векторный вид композиции преобразований (e):

$$\overrightarrow{G_o^{kn}} = a\overrightarrow{G_o^k} + b\overrightarrow{G_o^n}.$$

Используя предыдущее правило, можно записать:

$$\overrightarrow{G_o^{kn}} = a\overrightarrow{G_o^k} + b\overrightarrow{G_o^n} = \frac{kn-1}{k-n} \left(n\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_n} \right) \quad (4)$$

Ранее было найдено, что $\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{G_o^k} + k\overrightarrow{\Sigma_{ox}}$, $\overrightarrow{P_n} = \overrightarrow{G_o^n} + n\overrightarrow{\Sigma_{ox}}$. Подставим эти выражения в (4), получим правило векторной операции для композиции преобразований (e):

$$G_o^k \oplus G_o^n \rightarrow G_o^{kn} \Rightarrow \overrightarrow{G_o^{kn}} = \frac{kn-1}{k-n} \left(n\overrightarrow{G_o^k} - k\overrightarrow{G_o^n} \right).$$

Для композиции (f), имеем очевидное правило:

$$a\overrightarrow{\Sigma_{ox}} + b\overrightarrow{\Sigma_{ox}} = \vec{0}, \quad \text{где } a = -b, a - \text{любое.}$$

Сведём все полученные формулы в таблицу.

Таблица 1

$G_o^k \oplus \Sigma_{ox} \rightarrow P_k$	$\overrightarrow{P_k} = \overrightarrow{G_o^k} + k\overrightarrow{\Sigma_{ox}}$		(I)
$P_k \oplus \Sigma_{ox} \rightarrow G_o^k$	$\overrightarrow{G_o^k} = \overrightarrow{P_k} - k \cdot \overrightarrow{\Sigma_{ox}}$		(II)
$P_k \oplus G_o^n \rightarrow P_{kn}$	$\overrightarrow{P_{kn}} = n\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{G_o^n}$		(III)
$G_o^k \oplus G_o^n \rightarrow G_o^{kn}$	$\overrightarrow{G_o^{kn}} = \frac{kn-1}{k-n} \left(n\overrightarrow{G_o^k} - k\overrightarrow{G_o^n} \right)$	$k \neq n$	(IV)
$P_k \oplus P_n \rightarrow G_o^{kn}$	$\overrightarrow{G_o^{kn}} = \frac{kn-1}{k-n} \left(n\overrightarrow{P_k} - k\overrightarrow{P_n} \right),$	$k \neq n$	(V)
$\Sigma_{ox} \oplus \Sigma_{ox} \rightarrow T$	$\vec{0}$		(VI)

2. Следствия векторных формул

Следствие 1.
$$\vec{G}_O^k + k\vec{G}_O^{\frac{1}{k}} = \vec{0} \Rightarrow G_O^k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \rightarrow T$$

Доказательство.

Заметим, что $\vec{P}_1 = \vec{\Sigma}_{OX}$. Действительно:

$$\vec{P}_1 = (1-1)x \cdot \vec{i} - (1+1)y \cdot \vec{j} = -2y \cdot \vec{j} = \vec{\Sigma}_{OX}$$

Используя (III), можно записать: $\vec{P}_1 = \vec{P}_{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}\vec{P}_k + \vec{G}_O^{\frac{1}{k}} = \vec{\Sigma}_{OX}$ или

$\vec{P}_k = k\vec{\Sigma}_{OX} - k\vec{G}_O^{\frac{1}{k}}$. Зная же (I) - $\vec{P}_k = \vec{G}_O^k + k\vec{\Sigma}_{OX}$ и складывая с предыдущим выражением, получаем: $\vec{G}_O^k + k\vec{G}_O^{\frac{1}{k}} = \vec{0}$. А это соответствует очевидному $G_O^k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \rightarrow T$, т. е.

$$\vec{G}_O^k + k\vec{G}_O^{\frac{1}{k}} = \vec{0} \Rightarrow G_O^k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \rightarrow T,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2.
$$\frac{1}{k}\vec{P}_k + \vec{G}_O^{\frac{1}{k}} = \vec{\Sigma}_{OX} \Rightarrow P_k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \rightarrow \Sigma_{OX}$$

Доказательство:

Используя (II) и Следствие 1, можно записать: $\vec{G}_O^k = \vec{P}_k - k \cdot \vec{\Sigma}_{OX}$ и $\vec{G}_O^{\frac{1}{k}} = -k\vec{G}_O^k$.

Откуда получаем: $k \cdot \vec{\Sigma}_{OX} = \vec{P}_k + k\vec{G}_O^{\frac{1}{k}}$ или $\vec{\Sigma}_{OX} = \frac{1}{k}\vec{P}_k + \vec{G}_O^{\frac{1}{k}}$. Зная известную композицию геометрических преобразований $P_k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \rightarrow \Sigma_{OX}$, окончательно можем записать:

$$\frac{1}{k}\vec{P}_k + \vec{G}_O^{\frac{1}{k}} = \vec{\Sigma}_{OX} \Rightarrow P_k \oplus G_O^{\frac{1}{k}} \rightarrow \Sigma_{OX},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3.
$$\vec{P}_k = \frac{1}{n+1} \left(\vec{P}_{kn} + n\vec{P}_{\frac{1}{n}} \right).$$

Доказательство:

Используя (III), запишем: $\vec{G}_O^n = \vec{P}_{kn} - n\vec{P}_k$. Подставляя сюда вместо n $\frac{1}{n}$, получаем: $\vec{G}_O^n = \vec{P}_{k\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}\vec{P}_k$ или $n\vec{G}_O^n = n\vec{P}_{k\frac{1}{n}} - \vec{P}_k$. Но из Следствия 1 имеем: $\vec{G}_O^n + n\vec{G}_O^n = \vec{0}$. Таеким образом, можно записать:

$$\vec{P}_{kn} - n\vec{P}_k + n\vec{P}_{k\frac{1}{n}} - \vec{P}_k = \vec{P}_{kn} + n\vec{P}_{k\frac{1}{n}} - (n+1)\vec{P}_k = \vec{0}.$$

Откуда получаем: $\vec{P}_k = \frac{1}{n+1} \left(\vec{P}_{kn} + n\vec{P}_{k\frac{1}{n}} \right)$,

что и требовалось доказать.

А при $k = 1$ будем иметь: $\vec{\Sigma}_{OX} = \frac{1}{n+1} \left(\vec{P}_n + n\vec{P}_{\frac{1}{n}} \right)$.

Следствие 4. Очевидная композиция преобразований $P_k \oplus P_{\frac{1}{k}} \rightarrow T$ не имеет векторного аналога

Доказательство:

Рассмотрим векторное выражение: $a\vec{P}_k + b\vec{P}_{\frac{1}{k}} = \vec{0}$. Ему соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} a(k-1) + b\left(\frac{1}{k} - 1\right) = 0 \\ a(k+1) + b\left(\frac{1}{k} + 1\right) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a(k-1) - \frac{b}{k}(k-1) = 0 \\ a(k+1) + \frac{b}{k}(k+1) = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем: $a = \frac{b}{k}$, из второго: $a = -\frac{b}{k}$. Т. е. имеем явное противоречие. Из чего можно заключить, что композиция преобразований $P_k \oplus P_{\frac{1}{k}} \rightarrow T$ не имеет векторного аналога

Следствие 5.
$$\vec{G}_O^k = \frac{k}{1+k} \left(\frac{1}{k} \vec{P}_k - k \vec{P}_{\frac{1}{k}} \right)$$

Доказательство:

Из (1) и частного случая Следствия 3 соответственно имеем: $\vec{P}_k - k \vec{\Sigma}_{OX} = \vec{G}_O^k$,
 $\vec{\Sigma}_{OX} = \frac{1}{k+1} \left(\vec{P}_k + k \vec{P}_{\frac{1}{k}} \right)$. Подставляя второе выражение в первое и приводя подобные

члены, получаем искомый результат: $\vec{G}_O^k = \frac{k}{1+k} \left(\frac{1}{k} \vec{P}_k - k \vec{P}_{\frac{1}{k}} \right)$.

3. Алгебра преобразований, векторных формул

Обозначим в целях упрощения векторную функцию \vec{G}_O^k через \vec{G}_k , т. к. все преобразования \vec{G} рассматриваются относительно точки $O(0,0)$ – начала координат.

Выведем правила, по которым можно производить операции сложения и вычитания между преобразованиями \vec{G} , $\vec{\Sigma}$, \vec{P} .

Теорема

Преобразования \vec{G}_0 и \vec{P}_0 переводят любую точку плоскости в начало координат.

Доказательство:

Пусть дана точка $A(x_0, y_0)$. Найдём для этой точки её образы $A \xrightarrow{\vec{G}_0(A)} A^*$ и $A \xrightarrow{\vec{P}_0(A)} A^*$. Данные преобразования (имеются в виду векторные функции) равны между собой. Действительно:

$$\vec{G}_0(A) = \vec{P}_0(A) = -x_0 \cdot \vec{i} - y_0 \cdot \vec{j} \quad (\text{см. Формулы (1) и (2)})$$

Вектор образа $\vec{OA}^* = \vec{OA} + \vec{G}_0(A) = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} - x_0 \cdot \vec{i} - y_0 \cdot \vec{j} = \vec{0}$. Таким образом, преобразования \vec{G}_0 и \vec{P}_0 переводят любую точку плоскости в начало координат

Что и требовалось доказать.

Выведем следующие правила сложения преобразований и разложения преобразований на элементарные преобразования. Элементарными будем называть такие преобразования, у которых множители равны 1.

Например: $3\vec{P}_2$ - не элементарное преобразование, а \vec{G}_3 - элементарное.

Зная возможные композиции преобразований (a) – (f), выведем правила для векторных композиций.

Правила сложения

$$a\vec{P}_k + b\vec{G}_n = x\vec{P}_y \quad (5)$$

$$a\vec{P}_k + b\vec{\Sigma}_{OX} = x\vec{G}_y \quad (6)$$

$$a\vec{G}_k + b\vec{\Sigma}_{OX} = x\vec{P}_y \quad (7)$$

$$a\vec{G}_k + b\vec{G}_n = x\vec{G}_0 \quad (8)$$

Правила разложения на элементарные преобразования

$$a\vec{P}_k = \vec{P}_x + \vec{G}_y \quad (9)$$

$$a\vec{G}_k = \vec{G}_x \quad (10)$$

$$a\vec{\Sigma}_{OX} = \vec{P}_x + \vec{G}_y \quad (11)$$

Вывод (5):

Выражение (5) можно представить в виде системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} ak - a + bn - b = xy - x \\ -ak - a + bn - b = -xy - x \end{cases}$$

Решая данную систему, находим: $x = a + b - bn$, $y = \frac{ak}{a + b - bn}$. Таким образом, получаем правило сложения:

$$a\vec{P}_k + b\vec{G}_n = (a + b - bn)\vec{P}_{\frac{ak}{a+b-bn}}, \text{ где } a + b \neq bn. \quad (5^*)$$

Вывод (6):

Из $a\vec{P}_k + b\vec{\Sigma}_{OX} = x\vec{G}_y$ следует система уравнений:

$$\begin{cases} ak - a = xy - x \\ -ak - a - 2b = -xy - x \end{cases}$$

решая которую, находим: $x = a + b$, $y = \frac{ak + b}{a + b}$. Т. е. получаем такое правило:

$$a\vec{P}_k + b\vec{\Sigma}_{OX} = (a+b)\vec{G}_{\frac{ak+b}{a+b}}, \quad (6^*)$$

где $a \neq -b$.

Вывод (7):

Аналогично предыдущему, из начальной формулы (7), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} ak - a = yx - x \\ ak - a - 2b = -xy - x \end{cases}.$$

И получаем следующие решения этой системы: $x = a + b - ak$, $y = \frac{b}{a + b - ak}$.

Окончательно:

$$a\vec{G}_k + b\vec{\Sigma}_{OX} = (a + b - ak)\vec{P}_{\frac{b}{a+b-ak}}, \quad (7^*)$$

Вывод (8):

Исходной формуле $a\vec{G}_k + b\vec{G}_n = x\vec{G}_0$ соответствует равенство: $ak - a + bn - b = -x$. Т. е. получаем такое правило сложения:

$$a\vec{G}_k + b\vec{G}_n = (a + b - ak - bn)\vec{G}_0. \quad (8^*)$$

Заметим, что не существует правила сложения, соответствующего композиции (d), т. к. в этом случае получаем противоречивую систему уравнений.

Приступим к выводу формул разложения на элементарные преобразования.

Вывод (9):

Выражению $a\vec{P}_k = \vec{P}_x + \vec{G}_y$ соответствует система уравнений

$$\begin{cases} ak - a = x - 1 + y - 1 \\ -ak - a = -x - 1 + y - 1 \end{cases}.$$

Находим решения: $x = ak$, $y = 2 - a$. Получаем первое правило разложения:

$$a\vec{P}_k = \vec{P}_{ak} + \vec{G}_{2-a}. \quad (9^*)$$

Не составляет труда вывести и остальные два правила разложения.

$$a\vec{G}_k = \vec{G}_{a(k-1)+1}. \quad (10^*)$$

$$a\vec{\Sigma}_{OX} = \vec{P}_a + \vec{G}_{2-a}. \quad (11^*)$$

Сведём полученные формулы в таблицу.

Таблица 2

$a\overrightarrow{P}_k + b\overrightarrow{G}_n = (a + b - bn)\overrightarrow{P}_{\frac{ak}{a+b-bn}}$	$a + b \neq bn$	(5*)
$a\overrightarrow{P}_k + b\overrightarrow{\Sigma}_{OX} = (a + b)\overrightarrow{G}_{\frac{ak+b}{a+b}}$	$a \neq -b$	(6*)
$a\overrightarrow{G}_k + b\overrightarrow{\Sigma}_{OX} = (a + b - ak)\overrightarrow{P}_{\frac{b}{a+b-ak}}$	$a + b \neq ak$	(7*)
$a\overrightarrow{G}_k + b\overrightarrow{G}_n = (a + b - ak - bn)\overrightarrow{G}_0$		(8*)
$a\overrightarrow{P}_k = \overrightarrow{P}_{ak} + \overrightarrow{G}_{2-a}$		(9*)
$a\overrightarrow{G}_k = \overrightarrow{G}_{a(k-1)+1}$		(10*)
$a\overrightarrow{\Sigma}_{OX} = \overrightarrow{P}_a + \overrightarrow{G}_{2-a}$		(11*)

Сделаем небольшое замечание. Из (9*) и (11*) следует: $a\overrightarrow{\Sigma}_{OX} = \overrightarrow{P}_a + a\overrightarrow{P}_k - \overrightarrow{P}_{ak}$ или $\overrightarrow{\Sigma}_{OX} = \frac{1}{a}(\overrightarrow{P}_a + a\overrightarrow{P}_k - \overrightarrow{P}_{ak})$. Для $\overrightarrow{\Sigma}_{OX}$ коэффициент подобия k не играет никакой роли, поэтому его можно выбирать произвольно. Например, при $k = 1$ получим $\overrightarrow{\Sigma}_{OX} = \overrightarrow{P}_1$. А ранее мы действительно отмечали, что $\overrightarrow{\Sigma}_{OX} = \overrightarrow{P}_1$.

4. Примеры задач

Приведём примеры задач, при решении которых используются формулы (5*) – (11*).

Пример 1. Представить композицию преобразований, заданных векторными функциями $3\overrightarrow{P}_2 + \overrightarrow{\Sigma}_{OX} - 2\overrightarrow{G}_4$ в виде элементарных преобразований.

Решение:

$$3\overrightarrow{P}_2 + \overrightarrow{\Sigma}_{OX} = (3 + 1)\overrightarrow{G}_{\frac{3 \cdot 2 + 1}{3 + 1}} = 4\overrightarrow{G}_{\frac{7}{4}}$$

Здесь мы воспользовались правилом (7*). Далее, используя формулу (8*), получаем:

$$4\overrightarrow{G}_{\frac{7}{4}} - 2\overrightarrow{G}_4 = (4 + 4 - 7 + 8)\overrightarrow{G}_0 = 9\overrightarrow{G}_0$$

Окончательно приходим к ответу используя формулу (10*)

$$9\vec{G}_0 = \vec{G}_{9(0-1)+1} = \vec{G}_{-8}, \text{ т. е.}$$

$$3\vec{P}_2 + \vec{\Sigma}_{OX} - 2\vec{G}_4 = \vec{G}_{-8}$$

Пример 2. Решить уравнение $4\vec{P}_3 - 3\vec{G}_2 - \vec{X} = \vec{P}_{12}$ в элементарных преобразованиях.

Решение:

$$4\vec{P}_3 - 3\vec{G}_2 = (4 - 3 + 6)\vec{P}_{\frac{12}{4-3+6}} = 7\vec{P}_{\frac{12}{7}},$$

$$7\vec{P}_{\frac{12}{7}} = \vec{P}_{12} + \vec{G}_{2-7} = \vec{P}_{12} + \vec{G}_{-5},$$

$$\vec{P}_{12} + \vec{G}_{-5} - \vec{X} = \vec{P}_{12}, \text{ откуда } \vec{X} = \vec{G}_{-5}$$

В заключение заметим, что полученные результаты можно расширить новыми формулами, введя по аналогии с $\vec{\Sigma}_{OX}$ преобразование $\vec{\Sigma}_{OY}$. Т. е. преобразование осевой симметрии относительно оси OY .