

## Франц Герман

### «Золотые» уравнения и формулы

KIW – Gesellschaft e. V., Dresden, BRD,  
E-Mail: [kiw\\_dd@arcor.de](mailto:kiw_dd@arcor.de) [hanzmannferr@rambler.ru](mailto:hanzmannferr@rambler.ru)

Золотое сечение порой возникает в самых неожиданных математических задачах. В данной заметке мы покажем несколько таких примеров, с которыми автор столкнулся на протяжении почти сорокалетней математической деятельности. Ранее рассматриваемые примеры в известной автору литературе не встречались и это позволяет думать, что данная заметка будет интересна широкому кругу читателей.

**Факт 1.** Класс квадратных уравнений, которые мы сейчас рассмотрим, в полной мере можно назвать «золотым»:

$$X^2 - L_n \cdot X + (-1)^n = 0 \quad (1)$$

Здесь коэффициент  $L_n$  является  $n$ -ым членом числового ряда Люка. Напомним, числовой ряд Люка строится точно также как и ряд Фибоначчи по двум первым числам:  $L_0 = 2$  и  $L_1 = 1$ :

$$\{L_n\}: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \dots$$

Индекс  $n$  пробегает все значения целых чисел от  $-\infty$  до  $+\infty$ , т. е. ряд Люка может быть продолжен как влево, так и вправо.

Уравнения (1) интересны тем, что при любом  $n$  его корнями будут числа:

$$X_1 = \Phi^n \text{ и } X_2 = \frac{1}{(-\Phi)^n},$$

где  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618034\dots$  - и есть известное «золотое» сечение.

Доказывается это не сложно, прямой подстановкой. Достаточно вспомнить, что  $L_n = \Phi^n + (-\Phi)^{-n}$  и  $L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$ . Действительно, подставим  $X_1 = \Phi^n$  в уравнение (1), получим верное тождество:

$$\Phi^{2n} - (\Phi^n + (-\Phi)^{-n}) \cdot \Phi^n + (-1)^n = 0$$

Для  $X_2 = \frac{1}{(-\Phi)^n}$  получаем аналогично:

$$\frac{1}{\Phi^{2n}} - (\Phi^n + (-\Phi)^{-n}) \cdot \frac{1}{(-\Phi)^n} + (-1)^n = 0$$

**Пример:**

Пусть  $n=4$ ,  $L_4=7$ . Получаем уравнение  $X^2 - 7 \cdot X + 1 = 0$ . Решая данное уравнение, находим его корни:  $X_1 = 2 + 3\Phi = \Phi^4$ ,  $X_2 = 5 - 3\Phi = \frac{1}{(-\Phi)^4}$

На Рис.1 показано, как выглядят графики функций, соответствующих некоторым уравнениям из класса уравнений (1)

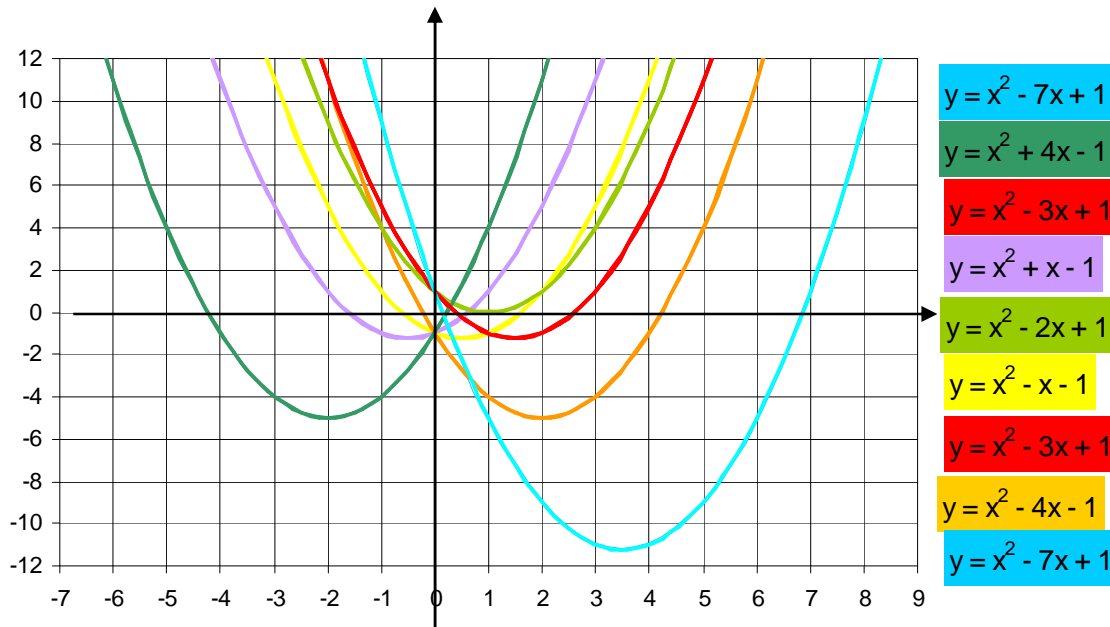


Рис.1

Заметим, что для чётных  $n$  и чётных  $-n$  получается одно и то же уравнение. Функции таких уравнений выделены на Рис.1 одним цветом. При  $n = 1$  получаем классическое уравнение золотого сечения (функция показана жёлтым цветом).

Известно, что числа Люка и числа Фибоначчи связаны различными интересными формулами. Например:  $L_n = \frac{F_{2n}}{F_n}$ ,  $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$  и др. Здесь через  $F_n$  обозначены члены ряда Фибоначчи, а сам ряд начинается при  $F_0 = 0$  и  $F_1 = 1$ . Поэтому, уравнения (1) могут быть переписаны в другом виде, с учётом вышепоказанных формул.

**Факт 2.** Рассмотрим ещё один класс «золотых» уравнений третьего порядка.

$$X^3 - (n+2) \cdot X^2 + n \cdot X + (n+1) = 0 \quad (2)$$

Для нас эти уравнения интересны тем, что они имеют по два общих корня:  $X_1 = \Phi$  и  $X_2 = 1 - \Phi$ . Графики функций таких уравнений показаны на Рис.2.

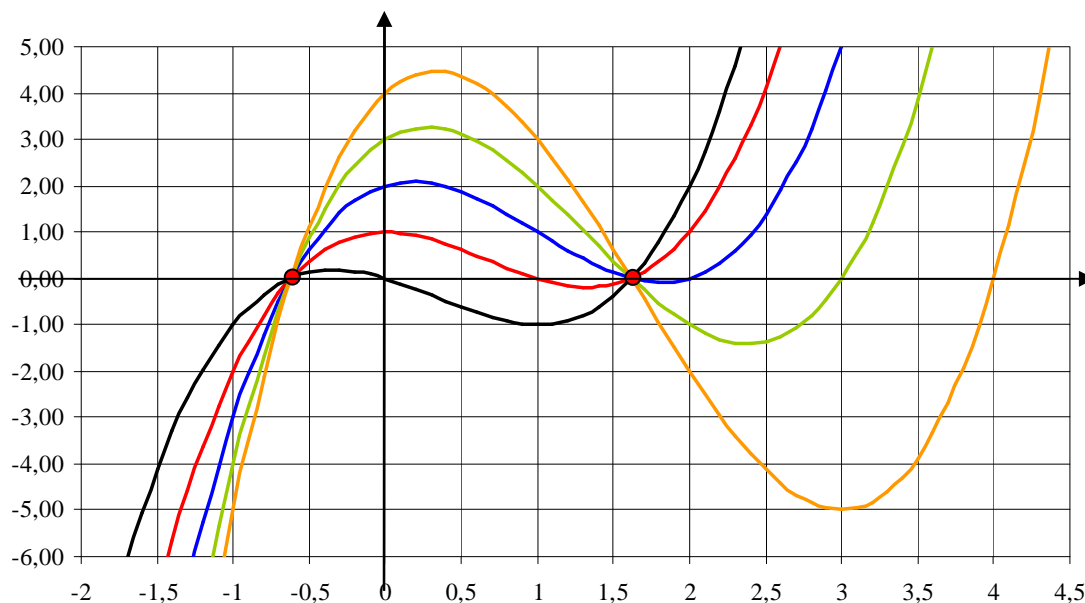


Рис. 2

Факт этот почти очевиден, т. к. уравнения (2) могут быть представлены в виде произведения двух уравнений:

$$(X^2 - X - 1) \cdot (X - n - 1) = 0$$

При  $n = -1$  получаем классический случай «золотого» уравнения. Здесь третий корень будет равен нулю (график соответствующей функции показан на Рис.2 чёрным цветом).

**Факт 3.** Существует квадратное уравнение, связывающее два последовательных члена ряда Фибоначчи:

$$F_{n+1}^2 + F_n \cdot F_{n+1} - F_n^2 - (-1)^{n+1} = 0 \quad (3)$$

Уравнение (3) интересно тем, что, зная значение члена ряда Фибоначчи и его порядковый номер, можно рекуррентно воспроизвести весь ряд. А т.к. корни два, то ряд воспроизводится в двух видах, где его члены либо положительны, либо все отрицательны.

Уравнение (3) просто выводится из известной формулы  $F_n^2 - F_{n-1} \cdot F_{n+1} = (-1)^{n+1}$ . Достаточно вспомнить, что  $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ .

При  $n \in \{0, -\infty\}$  получаем знакопеременный ряд Фибоначчи. Этот же ряд можно получить и для  $n \in \{0, +\infty\}$ , но использовать не правило сложения двух предыдущих членов для получения третьего, а правило вычитания:  $F_n - F_{n+1} = F_{n+2}$ . Тогда, по аналогии с уравнением (3), получаем такое уравнение:

$$F_{n+1}^2 + F_n \cdot F_{n+1} - F_n^2 + (-1)^{n+1} = 0 \quad (4)$$

Аналогичные уравнения существуют и для ряда Люка:

$$L_{n+1}^2 + L_n \cdot L_{n+1} - L_n^2 - 5(-1)^{n+1} = 0 \quad (5)$$

$$L_{n+1}^2 + L_n \cdot L_{n+1} - L_n^2 + 5(-1)^{n+1} = 0 \quad (6)$$

**Факт 4.** При исследовании взаимнообратного показательного-степенного уравнения с двумя неизвестными:

$$X^Y = Y^X \quad (7)$$

мы сталкиваемся с ещё двумя интересными, на наш взгляд, уравнениями ( всю работу можно найти на сайте дрезденского инженерно-научного общества:

[www.kiw-dresden.de](http://www.kiw-dresden.de) ):

$$X^{\frac{1}{X-1}} = \left(1 + \frac{1}{X}\right)^X \quad (8)$$

$$X^{\frac{X}{X-1}} = \left(1 + \frac{1}{X}\right)^{X+1} \quad (9)$$

Дело в том, что уравнения (8) и (9) имеют единственное решение  $X = \Phi$ .

Известный популяризатор канадский математик Росс Хонсбергер сказал: «хочется затаить дыхание, когда смотришь на эти уравнения».

Дважды золотое сечение встретилось автору в геометрических исследованиях.

**Факт 5.** Рассмотрим полуокружность Рис. 3.

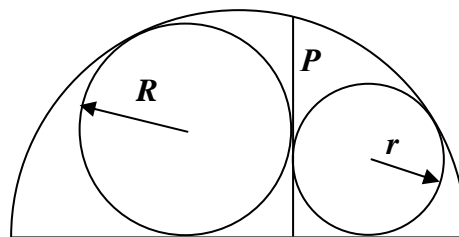


Рис. 3

Восставленный в произвольной точке диаметра перпендикуляр  $P$  делит полуокружность на две части. Очевидно, что в каждую из этих частей можно вписать окружности радиусов  $R$  и  $r$ . Тогда уравнение «перпендикуляра» будет иметь вид:

$$P^2 - (R+r) \cdot P - R \cdot r = 0 \quad (10)$$

Это уравнение не сложно выводится и его вывод мы здесь не приводим.

Как выяснилось, если  $\frac{P}{R} = \Phi$ , то  $\frac{R}{r} = \Phi^2$ , а  $\frac{P}{r} = \Phi^3$ .

**Факт 6.** Ещё пример из геометрии. Рассмотрим частные случаи Большой Теоремы Понселе для треугольника и для четырёхугольника (Рис. 4).

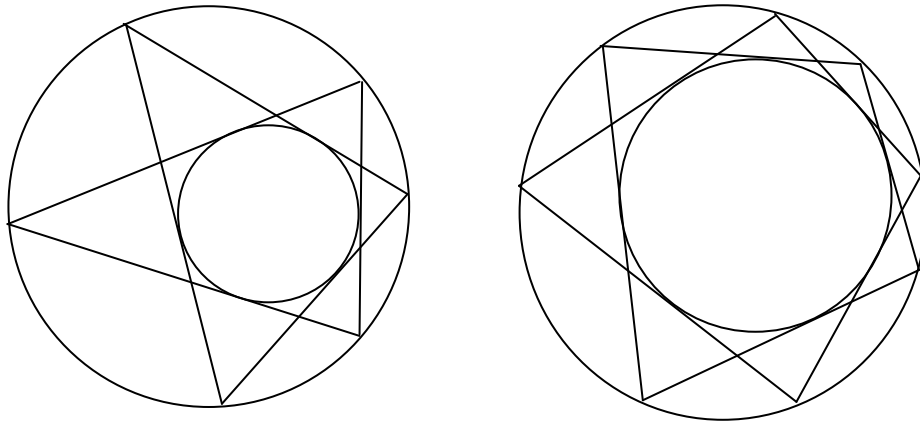


Рис. 4

Если даны вписанная и описанная окружности около данного треугольника, то существует бесконечно много треугольников, вписанных и описанных около данных окружностей (Рис.4 слева).

Возьмём произвольную точку на описанной окружности и проведём из неё касательную к вписанной окружности до пересечения с описанной окружностью. Из новой точки вновь проведём касательную. И замкнув первую и последнюю точки, мы вновь получим касательную к вписанной окружности.

Такие же рассуждения справедливы и для четырёхугольника. Если четырёхугольник имеет вписанную и описанную окружности, то существует бесконечно много четырёхугольников вписанных и описанных около данных окружностей (Рис. 4 справа).

Рассмотрим случай, когда описанные окружности около треугольников и четырёхугольников равны и совпадают, а вписанные окружности концентричны. И, кроме этого, центр описанной окружности принадлежит вписанной окружности четырёхугольников.

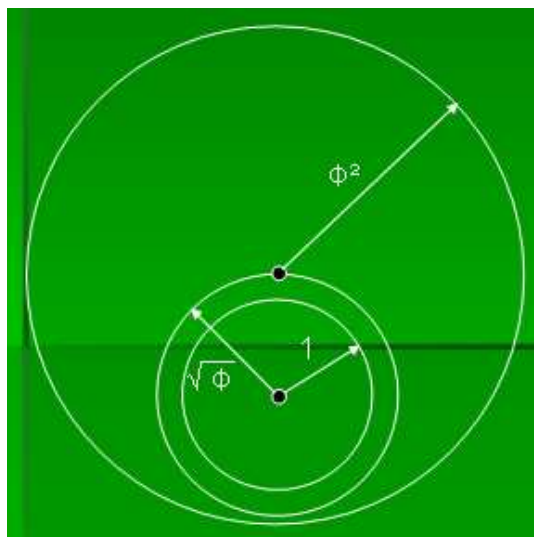


Рис. 5

В этом случае радиусы окружностей связаны «золотыми» значениями, как показано на Рис.5 и реализованы в построении на Рис.6.

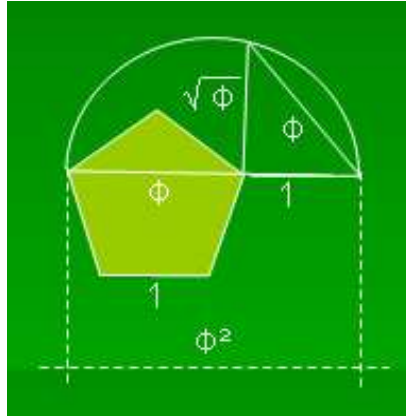


Рис. 6

В основе конструкции Рис.6 лежит правильный пятиугольник с единичной стороной.

**Факт 7.** Золотое сечение появляется и в одной из задач, связанной с непериодическим замощением плоскости.

Примеры исследуемых замощений показаны на Рис. 7.

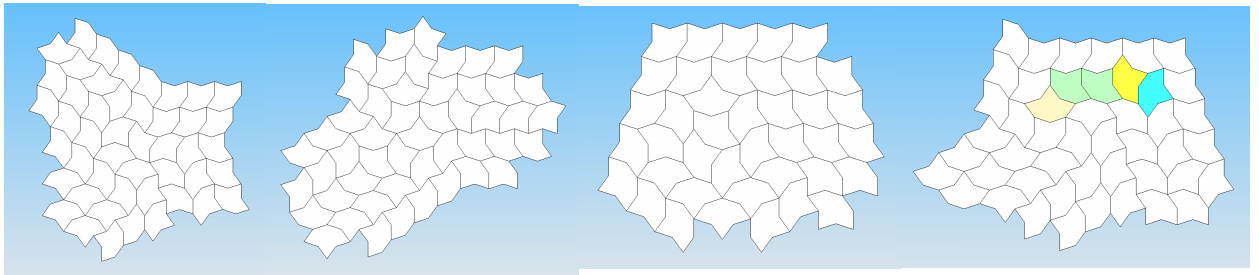


Рис. 7

Здесь «клеткой» замощения является фигура, показанная на Рис. 8.

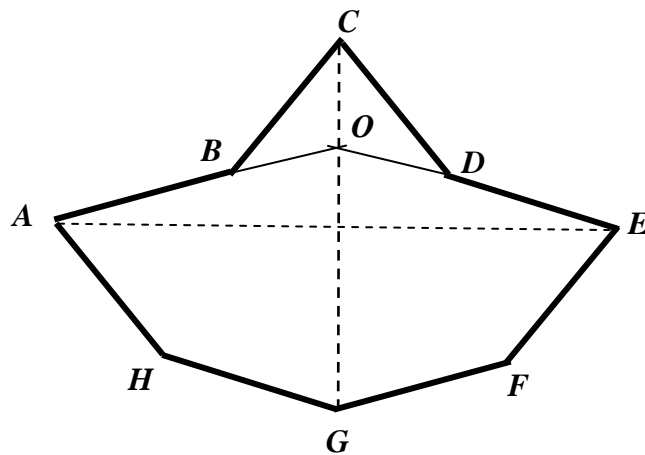


Рис. 8

Наша «клетка», как геометрическая фигура, имеет **20** диагоналей, которые можно разделить на 7 типов относительно их длин. Диагонали будем обозначать через  $d_i$ . Самая короткая по длине диагональ  $d_1$ , самая длинная -  $d_7$ .

Диагонали  $d_1$  - (BD, DF, BH),  $d_2$  - (BG, GD),  $d_3$  - (EG, DH, FH, FB, AG, CE, CA),  $d_4$  - (HC, AD, BE, CF),  $d_5$  - (CG),  $d_6$  - (HE, AF),  $d_7$  - (AE).

Длины диагоналей вычисляются по формулам:

$$d_1 = a\sqrt{3-\Phi}, \quad d_2 = a\sqrt{4-\Phi},$$

$$d_3 = a\sqrt{5-\Phi}, \quad d_4 = a\sqrt{6-\Phi},$$

$$d_5 = a\Phi(3-\Phi), \quad d_6 = a\Phi^2, \quad d_7 = a\Phi\sqrt{5-\Phi}.$$

«Клетка» замощения является перестройкой двух правильных пятиугольников. Всю работу можно найти на сайте дрезденского инженерно-научного общества:

[www.kiw-dresden.de](http://www.kiw-dresden.de)

**Факт 8.** Представьте себе, что ваш пол выложен паркетной плиткой, которая имеет размеры «золотого» прямоугольника.

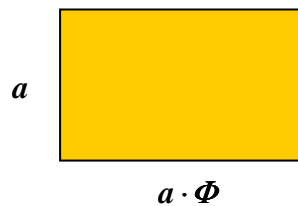


Рис. 9

Каким узором выложен ваш паркет – неважно. Это может быть традиционный узор паркетных полов (Рис.10а), может быть узор в виде кирпичной кладки (Рис.10б) или просто в виде сетки (Рис.10в).

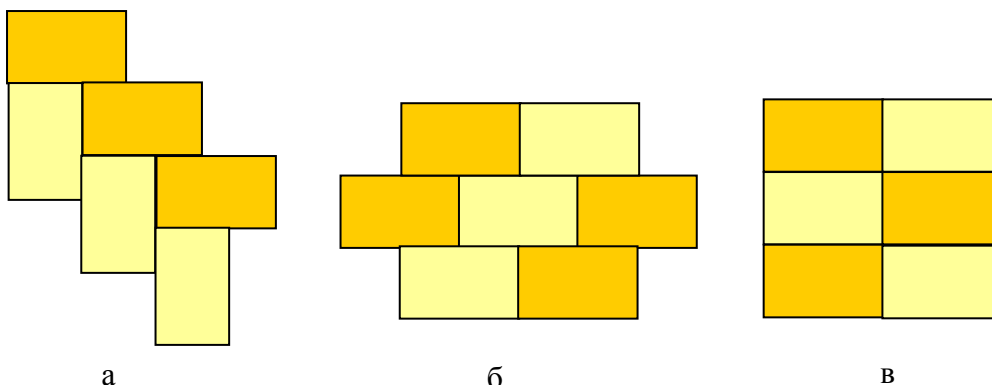


Рис. 10

Кроме того у вас в руках карандаш определённой длины, а именно:  $L = \frac{1}{2}a \cdot e$ , где  $e = 2.71828182\dots$  - основание натуральных логарифмов.

Случайным образом ваш карандаш падает на пол. Спрашивается: какова вероятность  $W$  того, что карандаш при падении пересечёт линии паркетного узора?

Обозначим через  $D_i$  число пересечений карандашом паркетных линий. Индекс  $i$  - это номер проводимого эксперимента - падения карандаша на пол.

Возможны следующие ситуации. Карандаш не пересёк ни одной линии (Рис. 11а),  $D_i = 0$ . Карандаш пересёк только одну линию (Рис.11 б),  $D_i = 1$ . Карандаш пересёк две линии (Рис.11 в),  $D_i = 2$ . И, наконец, возможна ситуация, когда карандаш будет пересекать три линии (Рис.3г),  $D_i = 3$ .

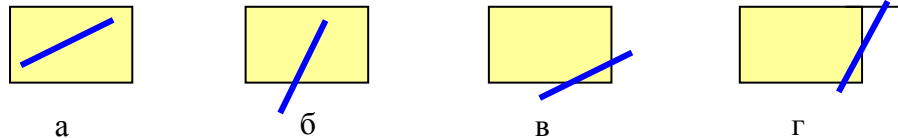


Рис. 11

Предположим, что мы провели  $N$  таких экспериментов. Тогда вероятность этого события можно подсчитать и записать в виде следующего выражением:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^N D_i}{N}$$

Однако, как оказалось, для вероятности данного события существует точная формула.

$$W = \frac{\Phi \cdot e}{\pi} \quad (11)$$

Мы специально взяли такие размеры паркетной плитки и карандаша, чтобы заинтриговать читателя и показать, как не совсем тривиальным способом можно объединить в одной формуле три фундаментальных числа.

**Факт 9.** Как оказалось, золотое сечение можно встретить не только в науке, технике, архитектуре, искусстве, музыке, окружающем нас мире, но и в спорте.

Тот кто играл или играет в футбол почти всегда чувствует, что одно футбольное поле по своим размерам более удобно чем другое. Как вы, наверное, знаете, точного стандарта для размеров футбольного поля не существует. В этом можно убедиться, взяв в руки любой учебник по футболу. И, как оказывается, наиболее удобным футбольным полем будет именно «золотой» прямоугольник. Из учебника по футболу мы имеем:



М 1 : 1000

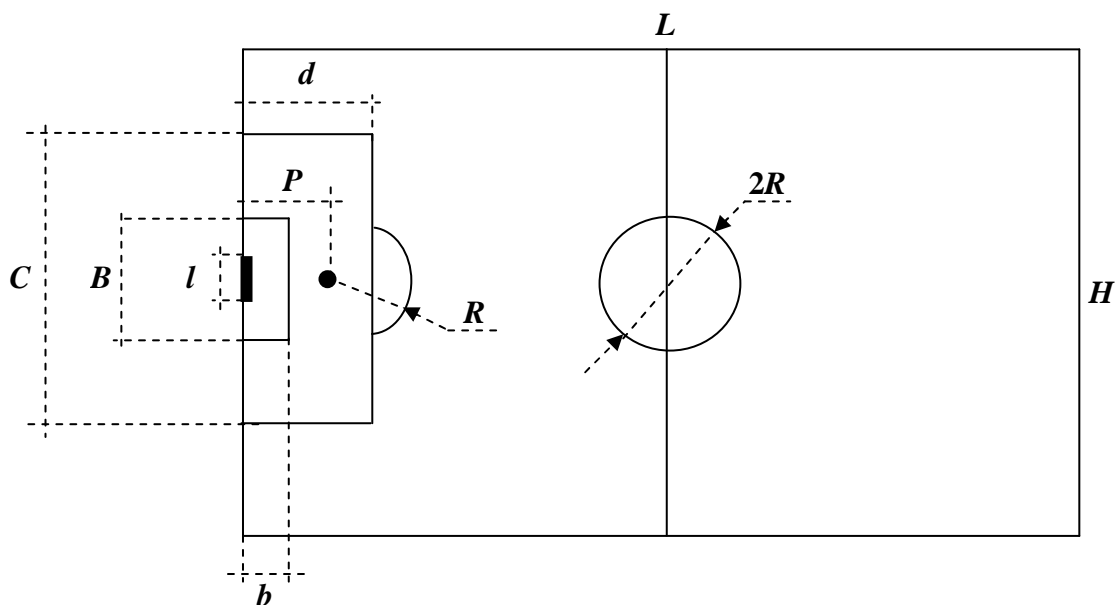


Рис. 12

$B$  - ширина вратарской площадки,  $3b = d$  - ширина штрафной площадки,  $2b + l = B$  - длина вратарской площадки,  $2d + l = C$  - длина штрафной площадки,  $\frac{B}{2} = R$  - радиус центрального круга,  $2b = P$  - расстояние пенальти. Но размеры футбольных ворот имеют точный стандарт.

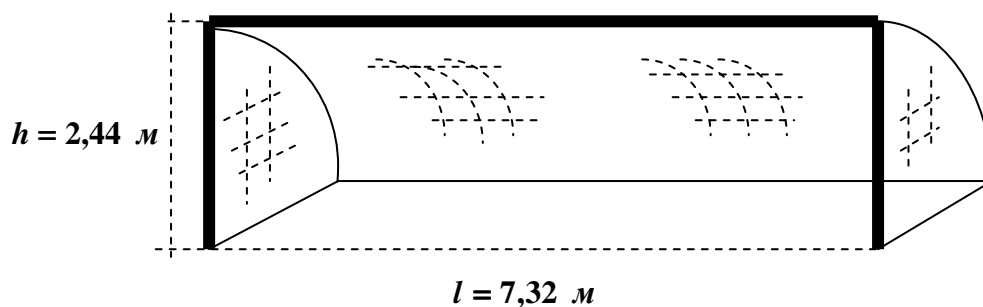


Рис. 13

Чтобы вычислить величины  $b$ ,  $d$ ,  $B$ ,  $C$  и  $R$ , надо знать число  $P$ . Обозначим через  $S$  площадь ворот, т.е.  $S = h \cdot l$ .

Как оказалось:

$$P = \Phi^2 \cdot \sqrt{S} = 11 \text{ м } 6 \text{ см} \tag{12}$$

Это главная формула футбольного поля. Теперь не трудно вычислить все другие размеры. Кроме того, выяснилось, что  $H = \Phi \cdot C$ , т.е.  $H \approx 65,4$  м. Тогда самая «удобная» длина поля будет  $L = \Phi \cdot H \approx 105,8$  м. В учебнике по футболу мы находим:  $H \approx 45 + 90$  м,  $L \approx 90 + 120$  м. Вычисленные нами размеры для  $L$  и  $H$  лежат почти точно в середине указанных в учебнике размеров.