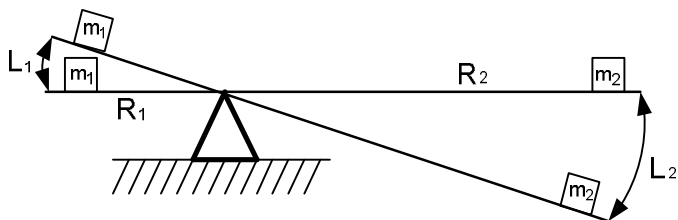


Почему длинное тело стремится повернуться вокруг центра масс, а не переместиться линейно, как единый кусок?

В отсутствие гравитационных полей главную роль при перемещении играет центр масс. Линейное перемещение тела возможно только в случае приложения силы к центру масс. Приложение силы в любой другой точке тела вызывает вращательное движение. Почему?

Рычаг Архимеда – следствие закона сохранения: масса на путь = const.



$$P_1 = P_2 \quad m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \quad m_1 \cdot \frac{L_1}{t_1} = m_2 \cdot \frac{L_2}{t_2} \quad \text{одновременность: } t_1 = t_2$$

$$\text{Тогда } m_1 \cdot L_1 = m_2 \cdot L_2 \quad \text{или} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{L_2}{L_1}$$

Из геометрии $\frac{L_2}{L_1} = \frac{R_2}{R_1}$ и тогда $\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_2}{R_1}$ это и есть правило рычагов Архимеда.

Чтобы поднять груз надо преодолеть гравитацию. Рычаг Архимеда позволяет «избавиться» от гравитации, но остается инерция.

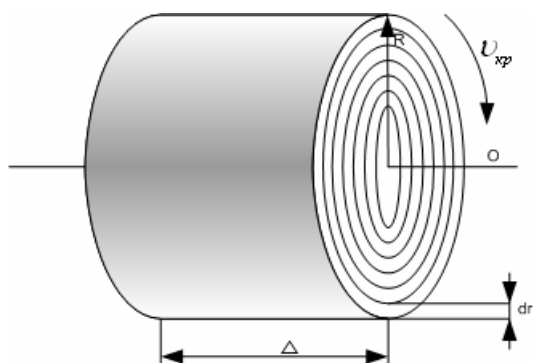
Если рычаг невесом, то количество движения вращения кажется такое же, как если бы тело двигалось прямолинейно. При жестком невесомом рычаге круговое движение тела ничем не отличается от линейного перемещения. На первый взгляд вроде все правильно.

Но давайте рассмотрим вращательное движение.

Одинаковое ли количество движения при вращении диска и при его линейном перемещении?

Иногда кажется, что у одного тела имеется два вида количества движения: круговое и линейное. Эта иллюзия породила ошибочную характеристику – момент количества движения.

Пусть диск толщиной Δ состоит из отдельных цилиндров разного диаметра с толщиной стенки dr .



Определим количество движения вещества цилиндра при его вращении во круг оси O.

$$P_n = m_n \cdot v_n \quad m_n = \rho \cdot V_n$$

$$V_n = dr \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_n \cdot \Delta \quad v_n = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_n}{t} \quad m_n = \rho \cdot dr \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_n \cdot \Delta$$

$$\text{И получим } P_n = \rho \cdot dr \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_n \cdot \Delta \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R_n}{t} = \rho \cdot dr \cdot \Delta \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R_n^2}{t}$$

Это выражение количества движения для любого цилиндра из состава диска.

Для определения количества движения всего диска при его вращении, суммируем количество движения всех цилиндров:

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum P_n = \int P_n(R_n) dr$$

$$P = \int_R^0 \rho \cdot \Delta \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R_n^2}{t} dr = \rho \cdot \Delta \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{t} \int_R^0 R_n^2 dr = \rho \cdot \Delta \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{3 \cdot t}$$

В итоге $P_{кр} = \rho \cdot \Delta \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{3 \cdot t}$ где Δ – толщина диска

Выделим массу диска в виде $m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot \Delta = \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot \Delta$

$$P_{кр} = \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot \Delta \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot R}{3 \cdot t} = m \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{t} = m \cdot \frac{2}{3} \cdot v_{кр}$$

Таким образом, количество движения при вращении диска на самом деле равно

$$P = m \cdot \frac{2}{3} \cdot v_{кр} \quad \text{а не } m \cdot v_{кр}, \text{ как кажется на первый взгляд.}$$

Пусть количество движения вращения равно количеству движения линейного перемещения $P_{кр} = P_{л}$. Тогда

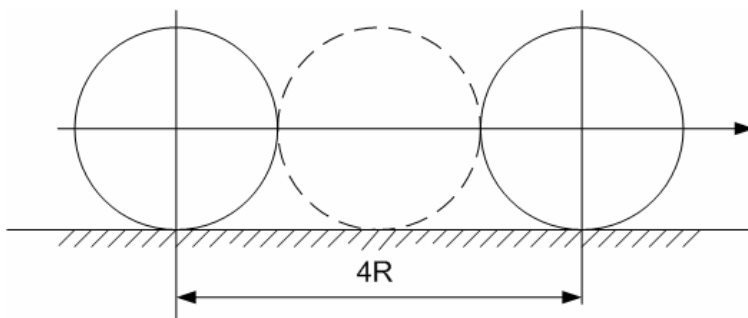
$$m \cdot \frac{2}{3} \cdot v_{кр} = m \cdot v_{л} \quad \text{т.е. } v_{л} = \frac{2}{3} v_{кр}$$

Здесь $v_{кр}$ есть круговая скорость на окружности диска. Все остальные точки внутри диска движутся медленнее.

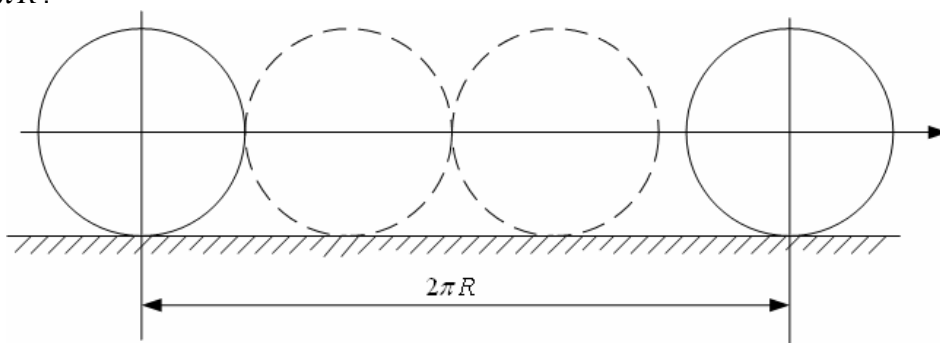
И так мы показали, что количество движения вращения диска будет равно количеству его линейного движения в том случае, если скорость линейного движения составляет $2/3$ скорости вращения. Иначе говоря, при прочих равных условиях ($v_{л} = v_{кр}$) количество движения вращения меньше количества движения линейного перемещения. Это и есть ответ на поставленный ранее вопрос: одинаковое ли количество движения при вращении диска и при его линейном перемещении. Но к движению рычага этот вывод применять мы не имеем право, т.к. пользовались круговой скоростью. А рычаг не совершает полный оборот.

Можно сказать, что количество движения вращения диска будет равно количеству его линейного движения, если за время полного оборота диска он переместится на расстояние $4R$ т.к.

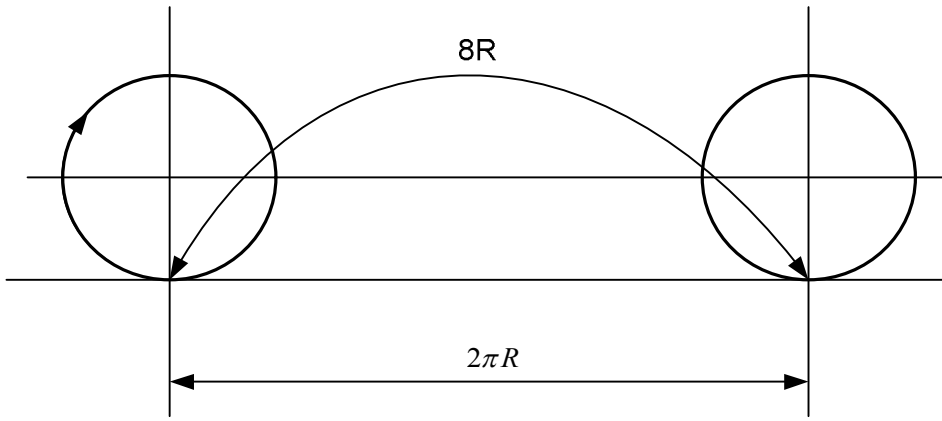
$$v_{л} = \frac{2}{3} \cdot v_{кр} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi \cdot 2 \cdot R}{T} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R}{3 \cdot T} \approx \frac{4 \cdot R}{T}$$



Но если диск будет катиться, то за время полного оборота ($T=t$) переместиться линейно на $2\pi R$:



Если диск катится, то точка на его окружности проходит путь $8R$. При этом весь диск линейно переместится на $2 \cdot \pi \cdot R$.



За период T скорость каждой точки $v_{кр.л} = \frac{8 \cdot R}{T}$.

Если диск не катится, а просто перемещается линейно на расстояние $2 \cdot \pi \cdot R$ за это же время, то его скорость $v_l = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$.

Тогда
$$\frac{P_{кр.л}}{P_l} = \frac{m \cdot \frac{8 \cdot R}{T}}{m \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}} = \frac{4}{\pi}$$

Т.е. количество движения катящегося диска больше количества движения линейного перемещения диска.

И так, мы получили весьма важный вывод:

1. количество движения при вращении диска меньше, чем количество движения его линейного перемещения $\frac{P_{кр}}{P_l} = \frac{2}{3}$.
2. Количество движения катящегося диска больше, чем количество движения его линейного перемещения $\frac{P_{кр.л}}{P_l} = \frac{4}{\pi}$.

Вывод.

Если внешнее воздействие на свободное тело не приходится на центр масс, то тело совершает поворот, а не линейное перемещение из-за того, что количество движения вращения меньше, чем количество движения его линейного перемещения, - тело охотнее совершает поворот, чем линейное перемещение.

С другой стороны, летящий вращающийся диск при внешнем воздействии скорее изменит свое линейное перемещение, чем вращательное движение (а значит и осевой наклон). По этой причине юла легко меняет свое линейное движение при неизменном направлении оси вращения.

В самом начале мы строили свои доказательства с использованием круговой скорости. Но для выводов закона рычага (Архимеда) нельзя пользоваться круговой скоростью, т.к. неизвестно состояние внутри периода T .

Если бы мы попытались описать движение точек диска за время t , меньшее, чем период T ,

с помощью круговой скорости $\omega = v_{кр} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$, то получили бы абсурдное решение:

количество кругового движения в 4 раза больше количества движения линейного перемещения. Этот ошибочный вывод можно получить следующим образом.

Известно, что расстояние можно измерять любой линейкой (с любым масштабом).

Сравнивая круговое и линейное движения, обозначим их скорости, как: $v_l = \frac{N_l \cdot R}{t}$ и

$$v_{кр} = \frac{N_{кр} \cdot R}{t}, \text{ или } v_l = N_l \cdot v \text{ и } v_{кр} = N_{кр} \cdot v, \text{ где } v = \frac{R}{t}.$$

Переходя к количеству движения

$$P_l = m \cdot N_l \cdot v \quad \text{и} \quad P_{кр} = m \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot N_{кр} \cdot v$$

$$\frac{P_{кр}}{P_l} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{N_{кр}}{N_l}$$

При прочих равных условиях (т.е. при $N_{кр} = N_l$) имеем $\frac{P_{кр}}{P_l} = \frac{4}{3} \cdot \pi$.

Таким образом, якобы, круговое количество движения примерно в 4 раза больше линейного.

По этому для описания движения рычага надо применять понятия линейной скорости.

Как известно, круговая скорость $\omega = v_{кр} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$. Если бы нам удалось разбить длину

окружности L на малые отрезки dl , то мы бы смогли перейти к линейной скорости $v_l = \frac{l}{t}$.

Но как разбить L ?

$$L = 2 \cdot \pi \cdot R = K \cdot R$$

Коэффициент $K = 2 \cdot \pi$ есть константа, т.е. не делится. Тогда разобьем R :

$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$. Но при этом мы будем получать все меньшие и меньшие окружности, а не отрезки L :

$$L = 2 \cdot \pi \cdot R_1 + 2 \cdot \pi \cdot R_2 + 2 \cdot \pi \cdot R_3 \quad \text{и т.д.}$$

Так что разбить длину окружности таким образом не удастся.

Дело в том, что при анализе количества кругового движения мы пользовались формулами волны (ω), где движение внутри волны не известно (не выразимо). Если мы выражаем движение точек диска через круговую скорость, то имеем единицу шкалы движения – один оборот (и ни как не меньше). Таким образом (через радиус) не возможно описать движение точек диска внутри оборота.

Даже если мы выразим линейную скорость через дугу

$$v_l = \frac{dl}{dt}$$

и представим элемент пути dl как произведение радиуса r окружности, по которой движется материальная точка, на величину угла $d\alpha$, соответствующего перемещению dl :

$$dl = R \cdot d\alpha \quad v_l = R \cdot \frac{d\alpha}{dt} = R \cdot \omega_\alpha$$

то и здесь мы совершаем ошибку: когда мы говорим о малом элементе дуги, как о функции угла $dl = R \cdot d\alpha$, то должны помнить, что какой бы малости угол $d\alpha$ мы ни взяли, при увеличении радиуса можно получить большую величину dl , не пригодную для принципа интегрирования. Если этого не учесть, то мы опять придем к круговой скорости следующим образом:

объем тонкого обода диска

$$V = \Delta \cdot dr \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_n$$

Где Δ – ширина диска, а dr – малая толщина обода.

Количество движения этого обода

$$P_n = m \cdot v = V \cdot \rho \cdot v$$

Линейную скорость на окружности выразим через длину дуги, зависящую от малого угла, т.е. от радиуса

$$v = \frac{dl}{dt} = R \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

Тогда $P_n = \Delta \cdot dr \cdot \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_n \cdot R_n \cdot \frac{d\alpha}{dt} = 2 \cdot \pi \cdot R_n^2 \cdot \Delta \cdot \rho \cdot dr \cdot \frac{d\alpha}{dt}$

Суммируем все тонкие обода диска

$$P = \sum_R^0 P_n = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \Delta \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot \int R_n^2 dr = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho \cdot \Delta \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

В итоге опять получаем

$$P_{кр} = \frac{2}{3} \cdot m \cdot v$$

Так что оставим dl в виде какой угодно малой части окружности и не будем вводить его в зависимость от радиуса $v_n = \frac{dl}{dt}$. Тогда

$$P_n = 2 \cdot \pi \cdot \Delta \cdot \rho \cdot dr \cdot R_n \cdot \frac{dl}{dt}$$

$$P = \sum_R^0 P_n = 2 \cdot \pi \cdot \Delta \cdot \rho \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \int_R^0 R_n dr = \pi \cdot R^2 \cdot \Delta \cdot \rho \cdot \frac{dl}{dt}$$

В итоге $P_{кр} = m \cdot v_{л.кр}$ или $P_{кр} = P_n$

Таким образом, если не вводить зависимость скорости точки от радиуса, то вместо вращательного движения мы получаем прямолинейное.

Как видим, на сегодняшнем уровне развития науки у нас нет способа корректно выразить круговое движение.

Можно ли создать диск с таким распределением массы, что его угловое количество движения будет $m \cdot v_{кр}$, а не $m \cdot \frac{2}{3} v$?