Маленькая теорема о сумме квадратов целых чисел.

Великий Ферма сформулировал известную гипотезу (теорему) Ферма;

Уравнение

$$a^n + b^n = c^n \quad (1)$$

при целых a , b, c не имеет решения при целых n > 2

В этом утверждении неявно указывается наличие решений при n =1 и n=2

Если при n=1 все достаточно тривиально, и для любых целых a и b существует целочисленное решение

c = a + b

То при n=2 найти все натуральные решения a,b,c € N целочисленного уравнения

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (2)$$

представляет некоторый интерес, который и попытаемся удовлетворить в виде этой небольшой теоремы:

Формулировка положений теоремы:

1) "Для всякого целого b > 2 существуют целые a и c $\neq 0$, удовлетворяющие уравнению (2)"

2) "Для всякого конкретного целого b > 2 существует конечное число целых a и c удовлетворяющих уравнению (2), и они все могут быть найдены аналитически

т.е можно найти все решение уравнения (2) для каждого конкретного целого b"

(Замечание: для b=1 или b=2 решение тривиально: a=0 c=b).

Доказательство:

Предварительно заметим, что квадрат любого целого числа m однозначно представляется в виде суммы последовательных нечетных чисел от 1 до 2m-1 :

$$m^2 = \sum_{k=1}^{m}(2k-1) \quad (3)$$

Это общеизвестное свойство следует из выражения для разности квадратов двух последовательных целых чисел (пусть это m и m-1)

D(m) = $m^2 - (m-1)^2 = 2m - 1$ (4)

D(0)=0

Т.К квадрат любого целого числа однозначно представим как сумма квадрата целого числа, (меньшего на 1) плюс дельта (4), то (3) является однозначным представлением квадрата целого числа m, как последовательная сумма дельт от 1 до m.

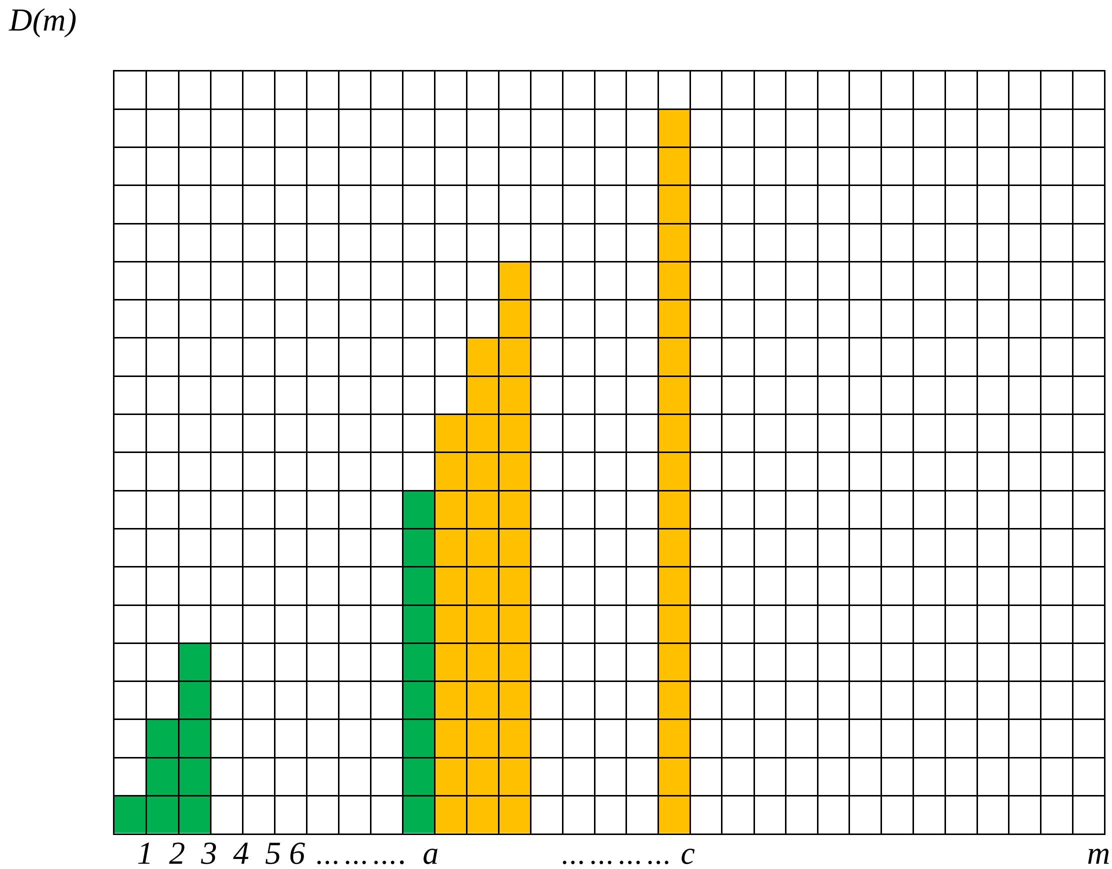
Небольшое отступление: Если дельту (4) отнести к минимальной величине изменения целочисленного аргумента (= 1) , то, по аналогии с обычной производной, выражение (4) можно считать целочисленной производной (или конечной разностью) от целочисленной функции F(m) = m^2

(под целочисленной функцией будем понимать функцию от целочисленного аргумента с целочисленными значениями).

Аналогично понятию интеграла от непрерывной функции (для наглядности), целочисленная функция F(m) = m^2 *может быть представлена как целочисленный интеграл от D(m).*

(Рассмотрим графическое представление выражения (4))

(площадь под ступенчатой функцией D(m) = m^2 *)*



Для m=c графически F(c) – площадь под ступенчатой функцией (от 0 до c.)

Аналогично и F(a) -. площадь под ступенчатой функцией (от 0 до a.)

Тогда из (2) b^2 *- это разность площадей, и представляется выражением*

$$(b)^2 = \sum_{k=a+1}^{c}(2k-1) \qquad (5)$$

Собственно (5) и позволяет просто найти решения уравнения (2)

(Другими словами для того, чтобы a *и* c *были целыми числами, удовлетворяющими (2),* $(b)^2$ *должно быть представимо суммой последовательных нечетных чисел, последнее из которых будет определять* c *а первое* a *)*

если $(b)^2 = \sum_{k=a+1}^{c}(2k-1)$ - *т.е.* если $(b)^2$ *представимо в таком виде,*

то, построив ряд состоящий из последовательных нечетных членами от 1 до 2a-1, получим:

$(a)^2 = \sum_{k=1}^{a}(2k-1)$ - *a будет целым числом согласно (3)*

$(b)^2 = \sum_{k=a+1}^{c}(2k-1)$ - *b будет целым числом по условию*

$(c)^2 = \sum_{k=1}^{c}(2k-1)$ - *c будет целым числом согласно (3)*

При этом, очевидно выполнение (2).

Т.К $\sum_{k=1}^{a}(2k-1) + \sum_{k=a+1}^{c}(2k-1) = \sum_{k=1}^{c}(2k-1)$

Доказательство пункт 1) теоремы:

Пусть b (соответственно и $(\mathbf{b})^2$) нечетное целое.

Тогда $(\mathrm{b})^2$ очевидно может быт представлено всего одним элементом ряда (5)

$(b)^2 = \sum_{k=c}^{c}(2k-1)$ *= 2c-1* -> c= $((b)^2$ +1)/2

Что позволяет найти решение (2) для любого нечетного b в виде: (6)

c= $((b)^2$ +1)/2 (c – целое число! т.к $(b)^2$ +1 четно, в силу нечетности b)

a= c-1 так же является целым числом т.к c целое, как разность целых чисел..

Пример: пусть b=11 -> $(b)^2$ = 121 -> c=(121+1)/2 = 61 -> a=c-1= 60

И действительно

60*60 + 11*11 = 61*61 (3600 +121 = 3721)

Пусть теперь b (соответственно и $(\mathbf{b})^2$) четное целое.

Тогда $(b)^2$ *может быт представлено как сумма всего двух членов ряда (5)*

(Сумма двух последовательных нечетных чисел – число четное)

$(b)^2 = \sum_{k=c-1}^{c}(2k-1)$*=2(c-1)-1+2c-1=4c-4* -> c= $\frac{(b)^2}{4}+1$

(Первое из сисчел $(b)^2$ */2 -1 вторoе ч*исло $(b)^2$ */2 +1* -> сумме сисчел = $(b)^2$ *)*

Что позволяет найти решение уравнения (2) для любого четного b в виде (7).

c= $\frac{(\boldsymbol{b})^2}{4}+\mathbf{1}$ **(с целое число т.к** $(\boldsymbol{b})^2$ ***кратно 4, как квадрат целого четного числа.)***

a= c-2 так же следовательно является целым числом, как разность целых чисел.

Пример:

Пусть b = 8 -> $(b)^2$ = 64 -> c=(64)/4+1 = 17 -> a=c-2= 15

И действительно:

15*15 + 8*8 = 17*17 (225 + 64 = 289)

Поскольку множество целых четных и нечетных чисел покрывает все множество целых чисел – то первая часть теоремы доказана.

Доказательство пункта 2) теоремы:

Как найти все решения (2) для конкретного целого b,

Это очень просто!

Если b не является простым числом – то b можно представить в виде:

b = B * m

(Где B и m целые числа, m – целочисленный множитель числа b).

Тогда, как было показано выше, (6) и (7), для любого целого B однозначно определяются целые A и C, удовлетворяющие уравнению (2) в виде:

$$A^2 + B^2 = C^2$$

Умножим обе части этого уравнения на m^2 получим:

$$m^2A^2 + m^2B^2 = m^2C^2$$

Тогда очевидно решение исходного уравнения будет иметь вид:

a= $m * A$ $b =$ m*B =b   c=m*C (8)

Пример:

Пусть b=12 (12 имеет, например, множители 3 и 4)

a) B=3, m=4

Применяя (6) получим:

C=(9+1)/2 =5   A=C-1=4

Тогда

b=B*4=12 c-C*4=20 a=A*4=16

И действительно:

16*16+12*12=20*20 (256 + 144 = 400)

b) B=4, m=3

Применяя (7) получим:

C=16/4 +1 =5 A=C-2=3

b=B*3=12 a=A*3=9 c=C*3=15

И действительно:

9*9 + 12+12 = 15*15 (81+144=225)

.

Как следствие – если b простое число – то решение единственное.

Действительно, в этом случае b не имеет целочисленных множителей (кроме m=1).

При m =1 находится единственное решение (6).

Теперь обратим внимание, что $(b)^2$ можно разложить на большее число множителей, чем b.

Снова посмотрим на график ступенчатой функции (3).

Как наглядно видно, для выполнения (2) - $(b)^2$ должно быть представлено (5) суммой (целым числом) последовательных нечетных чисел.

Сначала $(b)^2$ представим в виде целого числа одинаковых целых чисел.

Для этого разложим $(b)^2$ на целочисленные множители <=b.

Тогда $(b)^2$ очевидно представимо в виде (9)

$(b)^2 = \sum_1^m((b)^2/m)$ где m - целочисленный множитель числа $(b)^2$ (9)

Пусть m – нечетное. И $\frac{(b)^2}{m}$ также нечетное

Тогда $(b)^2$ легко представить в виде последовательности m нечетных чисел

$$(b)^2 = \sum_{i=1}^{m}(\frac{(b)^2}{m} - m + (2 * i - 1))$$

Последний элемент этой последовательности позволяет найти

c = ($\frac{(b)^2}{m} - m + (2 * m - 1)$ +1)/2 -> c = ($\frac{(b)^2}{m} + m$) /2 **(10)**

c – очевидно целое т.к ($\frac{(b)^2}{m} + m$) – кратно 2 как сумма двух целых нечетных чисел.

a = c – m - так же следовательно целое (как разность двух целых чисел).

Пример:

Пусть $(b)^2$*=441 (b=21) и пусть m=3*

Тогда: c=(441/3 +3)/2 = 75 a=75 - 3=72

И действительно:

*72*72 + 21*21 = 75*75 (5148+441=5625)*

Пусть теперь m – четное, и $\frac{(b)^2}{m}$ также четное

Тогда $(b)^2 = \sum_{i=1}^{m}(\frac{(b)^2}{m} - m + (2 * i - 1))$ (11)

c = ($\frac{(b)^2}{m} - m + (2 * m - 1)$ +1)/2 -> c = ($\frac{(b)^2}{m} + m$) /2 c – очевидно целое т.к

($\frac{(b)^2}{m} + m$) – кратно 2 как сумма двух целых четных чисел.

a = c – m - так же целое (как разность целых чисел).

Пример:

Пусть $(b)^2$=*64* *(b=8)* *и m=2*

Тогда c=17 a=15

И действительно:

8*8+15*15 = 17*17 (64+225=289)

Замечание: Два других возможных варианта

m *–нечетное,* $\frac{(b)^2}{m}$ четное

и

m – четное, $\frac{(b)^2}{m}$ нечетное

Не позволяют построить $(b)^2$ в виде части ступенчатой функции (последовательных нечетных чисел), что не позволяет для таких значений получить целочисленные решения для (2).

Таким образом (10 и 11) позволяют найти остальные решения (2) , для всех целочисленных множителей числа $(b)^2$

Следствие. Если b простое целое - то (2) имеет единственное решение.

(Конечно исключая тривиальное a=0 b=c)

Замечание 1:

Квадратичная форма уравнения (2) позволяет распространить полученные результаты и на отрицательные числа, если в уравнения подставить модуль чисел.

Замечание 2

Как легко увидеть - (6) и (7) это частный случай полученного решения (10) (11)

при m-1 и m=2.

Таким образом общее решение уравнения (2) для любого заданного целого b (с учетом замечаний) имеет вид:

c = $\boldsymbol{(\frac{(b)^2}{m} + m)}$ **/2**

a = c – m

Полученный результат представляется более общим, чем решение в

виде Пифагоровых треугольников, поскольку позволяет найти решение уравнения (2) по одной компоненте b и свойству целочисленности.

Пифагоров треугольник — это прямоугольный геронов треугольник (треугольник с целочисленными сторонами) и его три стороны известны как пифагорова тройка..

Все **примитивные** (не имеющие общего множителя) пифагоровы тройки (a , b , c) с гипотенузой c связаны и определяются через 2 параметра в следующем виде:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 4 \, m \, n, \quad c = m^2 + n^2,$$

где параметры m и n взаимно простые целые и одно из них чётно, при этом $m > n$.

Действительно подставив эти выражений в уравнение (2) : ($a^2 + b^2 = c^2$)

Получим тождество: $m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 2m^2n^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4$

$$m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$$

(Однако, здесь, для нахождения m и n требуется задать 2 элемента уравнения (2), для нахождения 2 –х параметров m и n, по которым можно вычислить третий элемент.

Доказанная выше маленькая теорема позволяет получить решение и для многомерного пространства:

Обобщенная теорема.

Положения доказанной выше теоремы можно распространить и на более общий (многомерный) вид сумм квадратов целых чисел в виде:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2 = c^2 \qquad (12)$$

1) "Для всякого целого $\boldsymbol{a_n} > 2$ существуют целые a_1 a_2 $a_3 \ldots a_{n-1}$ и c, удовлетворяющие уравнению (12)"

2) "Все целые a_1 a_2 $a_3 \ldots a_{n-1}$ и c удовлетворяющие уравнению (12) могут быть аналитически найдены для конкретного заданного целого a_n

Доказательство:

Действительно, рассмотрим сначала сумму 2-х последних членов уравнения (12) в виде:

$$a_{n-1}^2 + a_n^2 = b_{n-1}^2 \qquad (13)$$

Доказанная выше теорема для такого уравнения (2) позволяет найти целые

значения a_{n-1} и b_{n-1}

Теперь заменяем два последних члена уравнения (12) на одно (найденное из (13) b_{n-1}^2)

Получаем уравнение с числом членов меньше на 1.

$$a_1^2+ a_2^2+a_3^2+a_4^2 +...+ b_{n-1}^2=c^2 \qquad (14)$$

Снова решаем уравнение (14) относительно 2- х последних члено в виде:

$$a_{n-2}^2 + b_{n-1}^2 = b_{n-2}^2 \qquad (15)$$

Повторив эту операцию n-2 раза находим все искомые значения a_2 ... a_{n-1}

На последнем шаге уравнение (14) приводится к уравнению вида (2)

$$a_1^2+b_1^2 = c^3$$

которое позволяет найти a_1 *и* c

Каждый шаг решения (12) сводится к последовательному решению уравнений типа (2)

для которых (выше) доказано наличие решений и способы их нахождения.

Таким образом удается найти решения a_1 a_2 a_3 ... a_{m-1} *и* c *удовлетворяющие (12),*

и доказать обобщенную теорему.

Пример:

Пусть имеется многомерное уравнение:

$$a_1^2+ a_2^2+a_3^2+a_4^2=c^2$$

И пусть задан один из элементов (пусть это будет $a_4 = 3$)

Тогда уравнение примет вид $a_1^2+ a_2^2+a_3^2+9 = c^2$

а) для $a_3^2 +9 =b_3^2$ (применяя (6) находим):
$b_3 = (9+1)/2 =5$ $a_3 =5-1=4$

После подстановки уравнение примет вид $a_1^2+ a_2^2+25= c^2$

б) для $a_2^2+25= b_2^2$ (применяя (6)) находим:

$b_2 = (25+1)/2 =13$ $a_2 =13-1=12$

После подстановки уравнение примет вид $a_1^2+169 = c^3$

в) для $a_1^2+169 = c^3$ (применяя (6)) находим):

$c = (169+1)/2 =85$ $a_1 =65-1=84$

Проверка: (подставим полученные значения a_i *и* с исходное уравнение):

$$84^2 + 12^2 + 4^2 + 3^2 = 85^2 \qquad (7225=7225)$$

Для пытливого читателя, вероятно, будет так же интересно получить подтверждение гипотезы Ферма о отсутствии решений уравнения (2) при степенях >2. Как представляется, это можно сделать достаточно наглядно и просто.

Впрочем В 2016 году за доказательство Великой теоремы Ферма Эндрю Уайлс уже получил Абелевскую премию.

С уважением Богданов А.Н..