

Некоторые особенности и парадоксы классической механики

Геннадий Ивченков, к.т.н
kashey@kwic.com

Казалось бы, классическая механика – это полностью сформировавшаяся дисциплина и все ее проблемы давно решены. В данной статье автор не собираются ревизовать положения классической механики или вводить новые теории, но только пытается обратить внимание на некоторые парадоксы, “выплывающие” при решениях конкретных задач классической механики, особенно связанных с взаимопереходом поступательного и вращательного движений. Это вопрос не такой простой и связан с попытками получить безопорное движение посредством механических устройств – инерциоидов, в конструкции которых их авторы попытались использовать некоторые из этих парадоксов (2). В качестве иллюстрации в статье приведен анализ нескольких вариантов инерциоидов.

1. Ускорения вращательного движения

Нужно отметить, что понятие ускорения и силы во вращательном движении весьма странное, полностью запутывающее студентов. Ускорение, которое заставляет объект менять направление движения и двигаться по кривой (окружности), называется центростремительным и направлено к центру кривизны. Оно элементарно выводится и является, вроде бы, физически правильным (рис.1):

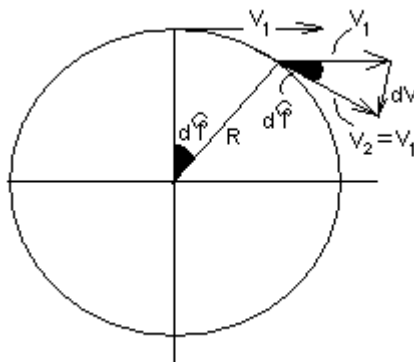


Рис.1

Для малых углов $V_1 d\varphi = dV$ (см. рис. 1), тогда $V_1 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dV}{dt}$ или $V_1 \omega = a$ и, так как

$$V_1 = \omega R, \text{ то } a_c = \omega^2 R \quad [1.1].$$

Очевидно, что при $d\varphi \rightarrow 0$ вектор dV (и ускорение $\frac{dV}{dt}$), появившийся вследствие изменения направления вектора V , направлен к центру.

Таким образом $a_c = \omega^2 R = \frac{V^2}{R}$ (1, 10, 11, 14, 15). Согласно упомянутым источникам, это ускорение, направленное к центру (центростремительное ускорение), вызывает силу инерции и соответствующее ускорение, называемое центробежным, которое направлено от центра кривизны. Разные источники считают фиктивным то центростремительное ускорение, то центробежное, а то и оба сразу (14, 15).

Нужно отметить, что вращение спутника по орбите и вращение грузика на веревке (центрифуга) – это разные вещи (вопреки утверждениям в упомянутой литературе). При движении по орбите гравитация (центростремительное ускорение) действует на всех уровнях и приложена ко всем бесконечно малым элементам (материальным точкам). К ним же приложена и центробежная сила (центробежное ускорение). Сумма этих сил равна нулю и на спутнике присутствует невесомость и отсутствует напряжение деформации тел, там находящихся (рис. 2А). Это, в частности, свидетельствует об отсутствии у гравитации дискрета. Таким образом, при движении спутника по орбите присутствуют оба ускорения - как центростремительное, так и центробежное.

В случае центрифуги (грузика на веревке) центростремительная сила отсутствует, а действует только приложенная на всех уровнях центробежная сила. Она приложена ко всем бесконечно малым элементам тел, там находящихся, даже на атомном уровне, например есть центрифуги по разделению изотопов урана. Соответственно, в центрифуге (рис. 2В) компенсация отсутствует и там действует только перегрузка (иначе бы центрифуга не работала).

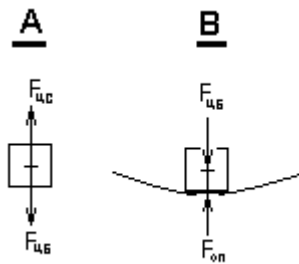


Рис 2

Таким образом, в центрифуге (грузик на веревке) именно центробежное ускорение является реальным (не центростремительное). Центробежная сила и растягивает веревку и вызывает реакцию опоры, к которой привязана веревка. Центробежное ускорение векторно складывается с центростремительным ускорением свободного падения g в центрифугах, в которых тренируются космонавты. Получается, что центростремительное ускорение вращающегося тела в этом случае не фигурирует никак и оно-то здесь, по видимому, и является фиктивным. Вообще-то, в этом случае формально присутствует две силы, растягивающие веревку, - одна направленная к оси (реакция опоры), а другая от оси. Они равны, иначе бы веревка улетела, но сила, направленная к оси не является центростремительной силой и никак не действует на тела в центрифуге. На тело в

центрифуге действует только реакция опоры со стороны стенки (рис. 2В). Она равна центробежной силе и направлена к центру центрифуги, но не является следствием центростремительного ускорения. Кроме того, она, в отличие от центростремительной силы на спутнике, не приложена ко всем бесконечно малым элементам тела, а приложена только к местам, соприкасающимся со стенкой, в результате чего тело сжимается как бы прессом (рис. 2В).

Вообще-то, существует путаница в вопросе, как правильно называть «центростремительное ускорение» и «центробежное ускорение» или «центростремительная сила» и «центробежная сила». Очевидно, что исходными понятиями являются «центростремительное ускорение» и «центробежное ускорение», так как сила всегда является следствием ускорения ($F = ma$). В таком случае правильнее называть не «сила инерции», а «ускорение инерции», которое для материальных тел проявляется как «сила инерции». Нужно отметить, что нечто подобное было предложено Эйнштейном в ОТО, где он попытался «привести к общему знаменателю» гравитацию и инерцию, заявив о наличии некоего «поля инерции», что принципиально неправильно (инерция, в отличие от гравитации, не выходит за пределы тела).

Кроме того, во вращательном движении присутствует очевидный парадокс – вектор окружной скорости меняет направление на противоположное после прохождения половины окружности, как будто тело затормозили и опять разогнали. Это особенно относится к случаю поворота окружности вращения вокруг диаметра на 180 град. (переворота), когда направление вектора окружной скорости меняется на противоположное в той же точке пространства (см. раздел 3). С проекцией скорости на ось X так формально и происходит, но при этом окружная скорость физически не менялась, а центростремительное ускорение (и сила натяжения веревки) направлено строго перпендикулярно окружной скорости и не может ни разогнать, ни ускорить тело, так как его проекция на направление вектора окружной скорости равна нулю.

На рис. 1, в (15) и в любом учебнике вектор dV и центростремительное ускорение dV/dt **появляются как следствие поворота вектора V** (а не наоборот), но причина этого поворота не раскрывается, как будто он происходит сам собой без постороннего воздействия (вот такое мол оно, вращательное движение).

Вообще-то, вектор окружной скорости можно формально представить как векторное произведение угловой скорости на радиус $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$ [1.2], то есть вектор окружной скорости V перпендикулярен векторам ω и R , но, опять же, физика процесса поворота вектора окружной скорости не раскрывается.

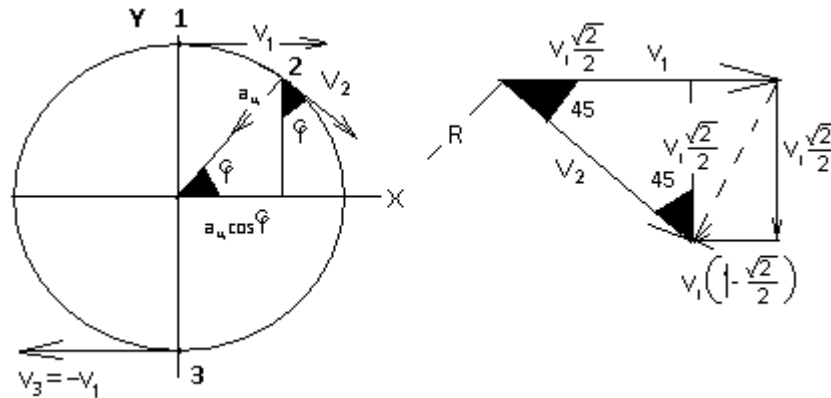


Рис 3

Можно также определить изменение проекции окружной скорости V на оси X и Y .

Из рис. 1 и 3 видно, что проекция окружной скорости V на ось X имеет вид $V_x = V \sin \varphi$ (на ось Y , соответственно, $V_y = V \cos \varphi$). Но, опять же, это следствие изменения направления вектора окружной скорости, а не причина.

Далее можно определить как центростремительное ускорение может менять направление вектора скорости на противоположное при повороте на 180 градусов из точки 1 в точку 3.

Согласно рис. 3, проекция центростремительного ускорения на ось X будет $a_{cx} = a_c \cos \varphi$. Тогда изменение проекции скорости на ось X , вызванное центростремительным ускорением за время прохождения угла φ , будет:

$$dV_x = a_{cx} dt = a_c \cos \varphi dt \quad \text{и} \quad V_x = a_c \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi dt = \frac{a_c}{\omega} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi d\varphi \quad [1.3]$$

$$\text{так как} \quad dt = \frac{d\varphi}{\omega}.$$

$$\text{Тогда} \quad V_x = \frac{a_c}{\omega} [\sin \varphi]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{\omega^2 R}{\omega} [\sin \varphi]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \omega R [\sin \varphi]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = V_{окр} [\sin \varphi]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \quad [1.4].$$

При прохождении половины окружности изменение проекции окружной скорости на X , вызванное центростремительным ускорением, в точке 3 будет равно:

$$V_{x3} = V_{окр} [\sin \varphi]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2V_{окр}. \quad \text{Тогда получаем, что} \quad V_3 = V_1 - 2V_{окр} = -V_{окр}. \quad \text{То есть,}$$

проекция окружной скорости на X , которая совпадает по направлению с вектором окружной скорости в нижней точке окружности (точка 3, см. Рис. 3), **меняет направление на противоположное**, при этом модуль не меняется.

Проекция на ось Y , соответственно, будет:

$$V_y = a_c \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi dt = \frac{a_c}{\omega} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = -\frac{a_c}{\omega} [\cos \varphi]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \quad [1.5].$$

Рассмотрим изменение вектора окружной скорости под действием центростремительного ускорения при прохождении сектора окружности в 45 град. Проекция скорости $a_c t$ на оси X и Y будут соответственно:

$$V_x = V_{okp} \left[\sin \varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = V_{okp} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \quad [1.6]$$

$$V_y = -V_{okp} \left[\cos \varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} V_{okp} \quad [1.7].$$

Вектор окружной скорости в точке 2 (угол 45 град относительно X, см. рис 2) будет равен сумме векторов $\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_x + \vec{V}_y$ [1.8].

Определим угол поворота вектора окружной скорости (см. рис. 3). Сложение векторов, приведенное на рис.3, показывает, что **вектор окружной скорости повернулся на 45 градусов в точке 2 под действием центростремительного ускорения за время прохождения сектора окружности в 45 градусов, а его**

величина (модуль) не изменилась: $V_2 = V_1 \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = V_1$.

Здесь нужно отметить, что вектор приращение скорости (изменения скорости под действием центростремительного ускорения) $\vec{V}_\Sigma = \vec{V}_x + \vec{V}_y$ не перпендикулярен \vec{V}_2 , а отличается от перпендикуляра к \vec{V}_2 (радиуса, по которому направлено центростремительное ускорение) на $\frac{\pi}{8}$. Это напоминает «объяснение» вращения спутника – «он как бы падает на Землю, но все время промахивается».

Кроме того получается, что некое тело, совершающее круговое движение (например, движение по круговой орбите) проходит некий путь под действием центростремительного ускорения за время поворота на угол φ . Вообще-то, тело за это время проходит путь по окружности равный $l = \frac{2\pi}{\varphi} R$, а для малых углов он аппроксимируется выражением $dl = R d\varphi$ (φ в радианах).

Теперь определим путь, пройденный телом под действием центростремительного ускорения за время прохождения дуги $d\varphi$.

$$dx = V_x dt = \frac{a_c}{\omega} \sin \varphi dt = \frac{a_c}{\omega^2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\omega^2 R}{\omega^2} \sin \varphi d\varphi = R \sin \varphi d\varphi \quad [1.9]$$

$$dy = V_y dt = \frac{a_c}{\omega} \cos \varphi dt = \frac{a_c}{\omega^2} \cos \varphi d\varphi = R \cos \varphi d\varphi \quad [1.10]$$

Тогда путь, пройденный телом под действием центростремительного ускорения за время прохождения дуги $d\varphi$ будет равен: $dl = R d\varphi \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = R d\varphi$, то есть возвращаемся к приближенному выражению для малых углов.

Теперь попробуем определить этот путь, например для случая прохождения дуги в 90 градусов:

$$x = \frac{a_c}{\omega^2} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = -R [\cos \varphi]_0^{\pi} = R \quad \text{и} \quad y = \frac{a_c}{\omega^2} \int_0^{\pi} \cos \varphi d\varphi = R [\sin \varphi]_0^{\pi} = R.$$

Тогда $l = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2}R = 1.41R$, а не $R\pi/2$ (1.57R).

Определим путь при прохождении дуги в 45 град.:

$$x = \frac{a_c}{\omega^2} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = -R [\cos \varphi]_0^{\pi} = -(0.707 - 1)R = 0.293R \text{ и}$$

$$y = \frac{a_c}{\omega^2} \int_0^{\pi} \cos \varphi d\varphi = R [\sin \varphi]_0^{\pi} = 0.707R, \text{ тогда } l = R\sqrt{0.5 + 0.0858} = 0.765R, \text{ а длина 45}$$

град. дуги равна $0.785R$. Это уже ближе, но хорда всегда короче дуги.

Получается, что приведенные формулы работают только для малых углов. Таким образом проблема с поворотом скорости при вращательном движении (парадокс) остается потому, что «квадратура круга» еще до сих пор не решена и хорда не заменяет дуги, а многогранник – окружность (это уже к математикам-геометрам, которые когда-то решали вопрос, сходятся ли параллельные линии в бесконечности, или не сходятся).

Кроме того, если тело проходит путь под действием ускорения, то получается, что центростремительная сила должна производить работу ($A = F_c l = m a_c l$, где m – масса движущегося по орбите тела)? А этого нет.

Таким образом, несмотря на то, что поворот вектора выведен как следствие действия центростремительного ускорения (формулы 1.4 – 1.8), но дополнительный анализ показывает, что тут «не все просто».

Кроме этого получается, что **центростремительное ускорение выведено как следствие (а не причина) поворота вектора окружной скорости** (формула 1.1). Далее был выведен **поворот вектора окружной скорости при вращательном движении как результат действия центростремительного ускорения** (формулы 1.4 – 1.8, рис. 3, см. выше по тексту). Круг замкнулся. Что изначально заложили, то и обратно получили – центростремительное ускорение есть результат поворота вектора окружной скорости, а поворот вектора окружной скорости – результат действия центростремительного ускорения. Получается, что истинная причина поворота вектора окружной скорости так и не раскрыта. Тем более, как было отмечено выше, центростремительное ускорение и сила строго перпендикулярны вектору окружной скорости, не могут его изменить и принципиально не могут производить работу.

Опять же, для случая орбитального движения под действием гравитации поворот вектора популярно объясняется тем, что тело «как бы падает на Землю, но все время промахивается». То есть, согласно такому объяснению получается, что вектор скорости тела на орбите не является касательной к орбите, а является суммой двух векторов – касательного к орбите и нормального $\vec{V}_\Sigma = \vec{V}_\parallel + \vec{V}_\perp$, так как тело, вроде бы, падает на Землю (вывод, основанный на этом допущении, приведен выше по тексту, формулы 1.4 – 1.8). Но, так или иначе, эти два вектора взаимно перпендикулярны и дополнительная окружная составляющая, замедляющая или разгоняющая спутник, отсутствует.

Это, тем более, не относится к центрифуге (веревке с грузиком). В этом случае очевидно, что грузик не падает на ось вращения и не имеет тенденции к этому. Таким образом, повторяясь, веревка с грузом (шариком) не является аналогом гравитации и совершенно не иммитирует ее. То есть движение тела по орбите и вращение центрифуги – это принципиально разные вещи.

Парадокс с поворотом вектора скорости при вращательном движении далее рассмотрен в параграфе 3 ниже по тексту.

Все, вышесказанное, вообще-то, должно было бы быть элементарным и давным-давно и окончательно изученным (это же классическая механика), но, при более подробном рассмотрении, получается весьма неоднозначным и запутанным. В связи с этим нужно особенно проанализировать “парадоксы”, связанные с взаимосвязью и взаимопереходом поступательного и вращательного движений. Это тема следующих параграфов.

2. Переход из поступательного движения во вращательное

Переход поступательного движения во вращательное и наоборот вызывает много непониманий и вопросов (парадоксов). Можно попробовать в них разобраться.

Предположим, что некий шарик (частица, материальное тело) массой m вылетает из некоего внешнего пистолета со скоростью V и попадает в незакрепленную “улитку” – короткий цилиндр со входом. Схема представлена на рис. 4. Считаем, что трение отсутствует. Шарик, попадая в цилиндр, закручивается, создавая давление на стенки цилиндра.

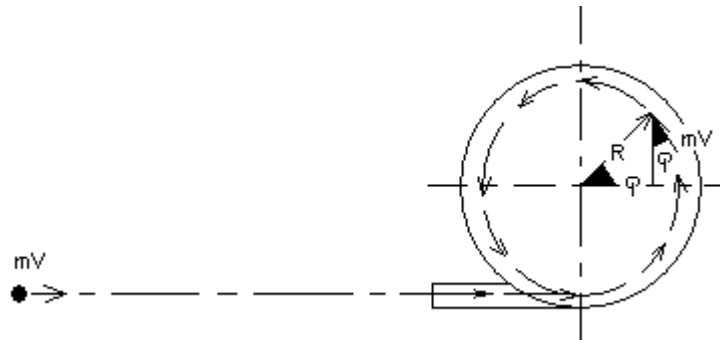


Рис. 4

Импульс силы, действующий по X на участок стенки цилиндра за время движения по нему шарика, определяется по формуле:

$$Fdt = ma_c \frac{1}{\omega} \sin \varphi d\varphi = m \frac{R}{V} \frac{V^2}{R} \sin \varphi d\varphi = mV \sin \varphi d\varphi \quad [2.1],$$

где $a_c = \frac{V^2}{R}$ - центробежное ускорение, и $F_\varphi = mV\omega \int_0^{\Delta\varphi} \sin \varphi d\varphi = -mV\omega [\cos \varphi]_0^{\Delta\varphi}$.

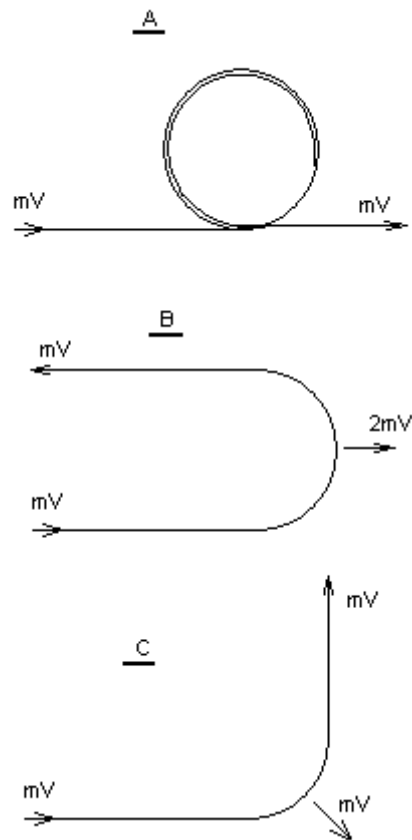


Рис. 5

В случае прохождения шариком полной окружности (рис.5.А), импульс, передаваемый “улитке”, очевидно равен нулю так как импульсы от одной половины окружности и другой половины окружности взаимно компенсируются. В случае прохождения шариком половины окружности (рис. 5 В), после чего он вылетает из улитки, импульс силы, приложенной к цилиндру (“улитке”) будет равен:

$$Ft = mV \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = -mV [\cos \varphi]_0^{\pi} = 2mV, \text{ при этом импульс силы будет приложен в}$$

том же направлении, что и исходная скорость шарика (как при упругом ударе).

Соответственно, сила, приложенная к улитке при прохождении половины окружности будет $F_{\pi} = -mV \omega [\cos \varphi]_0^{\pi} = 2mV \omega$

При прохождении шариком четверти окружности (рис. 5 С), соответственно, импульс силы, переданный “улитке” будет равен;

$$Ft = mV \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = -mV [\cos \varphi]_0^{\pi/2} = mV, \text{ при этом импульс силы будет приложен}$$

под углом 45 град относительно исходной скорости шарика (упругий удар под углом, как в бильярде).

Таким образом получается, что импульс силы, приложенный к “улитке”, зависит от углового расстояния φ , пройденного шариком. Если шарик проходит целое число оборотов, то импульс силы, приложенный к “улитке”, равен нулю. А если число оборотов не целое, то импульс силы и его направление зависит от избыточного углового расстояния $\Delta\varphi$, пройденного шариком (см. Рис. 5):

$$Ft = mV \int_0^{\Delta\varphi} \sin \varphi d\varphi, \text{ где } \Delta\varphi = \varphi - 2n\pi, \text{ а } n - \text{ число оборотов.}$$

Этот вопрос остается открытым в случае, когда шарик остается в “улитке” и его угловое расстояние φ , пройденное в “улитке”, равно бесконечности.

Нужно отметить, что случаи, приведенные на рис.5, когда шарик после некоторого пройденного в “улитке” углового расстояния φ вылетает из нее, выглядят как варианты упругого удара твердых материальных тел, но при упругом ударе тело тормозится и опять разгоняется, чего в «улитке» не происходит.

Далее, если в улитке движется один шарик, то система на рис. 5В начнет вначале поворачиваться против часовой стрелки вокруг центра кривизны (центра масс улитки) потому, что в это время сила давления шарика приложена к нижней четверти окружности. Затем при прохождении шариком верхней четверти окружности, система повернется назад по часовой стрелке. В итоге после вылета шарика система получит количество движения mV и может начать колебаться вокруг центра окружности, на что тоже должна уходить энергия. Тогда система на рис. 5А во время прохождения шариком улитки начнет «дергаться» по двум осям относительно ее центра масс. И, опять же, остается вопрос о повороте вектора окружной скорости, поднятый в разделе 1.

Из механики известно, что при вращательном движении существует аналогия поступательному движению (1, 8). При этом, аналогом поступательной скорости \vec{V} является угловая скорость $\vec{\omega}$, аналогом массы является момент

инерции $J = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$ или $J = mR^2$ для одной материальной точки, аналогом

количества движения \vec{p} является момент количества движения $\vec{L} = J\vec{\omega}$, а аналогом

силы является момент силы M : $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = mR \frac{1}{R} \left[\vec{R} \times \frac{d\vec{V}}{dt} \right] = m \left[\vec{R} \times \vec{a} \right] = \vec{R} \times \vec{F}$.

А также работа: $A = \int_0^{\varphi} [\vec{M}] d\varphi$. [2.2].

Кроме того, соблюдается «3-й закон» для вращательного движения:

$$\vec{M} dt = J d\vec{\omega} \quad [2.3].$$

и, в случае свободно вращающихся тел (при $M = 0$), в замкнутой системе

$$\sum J_i \omega_i = const \quad [2.4].$$

А если момент инерции меняется во времени, то $M dt = \omega dJ$ - аналог закона «импульс силы – количество движения» в форме Эйлера для поступательного

движения ($F dt = V dm$), тогда $M = \omega \frac{dJ}{dt} = \omega \dot{J}$ [2.5],

что является аналогом формулы тяги реактивного двигателя $F = V \frac{dm}{dt} = V\dot{m}$, где

\dot{m} - массовый расход ракетного топлива. Тогда \dot{J} - «расход момента инерции»?

Если масса грузика постоянна, то $\frac{dJ}{dt} = 2m \frac{dR}{dt}$ [2.6]

и, соответственно, $M = 2m\omega \frac{dR}{dt}$,

а если меняется масса грузика при постоянном плече, то $\frac{dJ}{dt} = R^2 \frac{dm}{dt}$

и $M = \omega R^2 \frac{dm}{dt} = RV_{ok} \frac{dm}{dt} = FR$, то есть равен силе тяги, умноженной на плечо

(крутящий момент реактивной турбины).

Следовательно, можно использовать формулы для поступательного движения, но подставив туда соответствующие величины для вращательного движения.

В то же время, центробежное ускорение (и центростремительное) в моменте силы и в работе не участвует.

Но здесь необходимо отметить, что момент количества движения некой массы (например, шарика в улитке, см. рис. 4) L при его движении по окружности – вращательном движении, который выполняет функцию количества движения p при поступательном движении, **не тождественно равен исходному количеству движения данной массы (шарика) p при входе в “улитку”**.

При попадании шарика в “улитку” количество движения $\vec{p} = m\vec{V}$ переходит в момент количества движения $\vec{L} = J\vec{\omega}$ (причем, сразу появляется момент с плечом R). Таким образом, вообще-то, должно было быть тождественное равенство $\vec{p} \equiv \vec{L}$ (?). В то же время

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = mR \frac{[\vec{V} \times \vec{R}]}{R} = m[\vec{V} \times \vec{R}] \quad [2.7].$$

Или в скалярном виде $L = mVR$.

В это выражение входит дополнительная размерность (расстояния до центра R) и, соответственно, **размерности количества движения и момента количества движения не совпадают**. Не совпадают и вектора (вектор ω ортогонален вектору V), в то время, как скорость и масса шарика при движении в “улитке” не меняется. Таким образом, говорить о переходе исходного поступательного количества движения шарика p в момент количества движения L шарика в “улитке” не приходится, так как **количество движения и момент количества движения – это разные физические величины: $mV \neq J\omega$** .

В то же время кинетическая энергия влетающего шарика равна кинетической энергии вращения шарика в “улитке”. В этом случае момент количества движения L полностью выполняет функцию количества движения p при поступательном движении перед попаданием в “улитку”:

$$E_{kin} = \frac{L^2}{2J} = \frac{(mRV)^2}{2mR^2} = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

и, соответственно, $E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{L^2}{2J}$ [2.8].

Таким образом, остается парадокс, связанный с тем, что **центробежное ускорение a_c никак не участвует ни в работе вращательного движения (формула [2.2]), ни в его кинетической энергии (формула [2.8]). Но, то же время, оно создает силу, действующую на стенки “улитки” (формула [2.1]).** Получается, что эти два ускорения : окружное ускорение - следствие разгона тела при вращении (возникающая при этом тангенциальная сила выполняет работу)

$$a_{окр} = \frac{1}{R} \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R^2} \frac{dV_{окр}}{dt}$$
 и центробежное ускорение (опять же, возникающая при

этом центробежная сила работу не выполняет) $a_c = \frac{V_{окр}^2}{R} = \omega^2 R$ непосредственно не связаны?

Теперь насчет размерности угловой скорости ω . В одних источниках она (в системе СИ) определена как рад/сек, а в других как 1/сек, путая студентов. Какое же правильное? Вообще-то, угловая скорость определяется по формуле $\omega = \frac{V_{окр}}{R}$ и

должна иметь размерность $\omega = \frac{V_{окр}}{R} \left[\frac{m}{\text{сек} \times m} \right]$, то есть $\frac{1}{\text{сек}}$.

Далее рассмотрим один из вариантов перехода вращательного движения в поступательное: из пращи по касательной вылетает камень (спортивный молот) со скоростью $V_{окр}$, а метатель получает импульс $mV_{окр}$ в противоположную сторону.

Причем, он получает его сразу, без разгона, в момент открытия пращи (или отпуская троса). Формально это выглядит как реактивное движение $m_{ball} V_{окр} = m_{man} V$, но скорость $V_{окр}$ он получает сразу, то есть ускорение должно было бы быть $a \rightarrow \infty$, чего не бывает. Этот парадокс решается, если принять во внимание то, что и метатель и камень (спортивный молот) вращаются вокруг одного центра с одинаковой угловой скоростью $\omega_{ball} = \omega_{man}$, но с разными

окружными скоростями $V = \frac{m_{ball} V_{окр}}{m_{man}}$. Соответственно, при открытии пращи они

оба разлетаются в разные стороны со своими скоростями, которые были уже заранее получены при вращении. **Это является одним из вариантов перехода вращательного движения в поступательное. Таким образом, этот случай не является реактивным движением,** хотя формула 3-го закона совпадает с полученной для данного случая. **Кроме того, эти две массы – метатель и камень – вылетают из разных точек, разнесенных на расстояние (плечо)**

$$r_{\Sigma} = r_1 + r_1 \frac{m_{ball}}{m_{man}} = r_1 \left(1 + \frac{m_{ball}}{m_{man}} \right),$$
 где r_1 - радиус бросания камня. Это же относится к

центрифуге и шарик на веревке: шарик и тело, на котором закреплена ось, вращаются вокруг некоего центра, находящегося между осью и шариком. В случае центрифуги это не чувствуется, так как ось закреплена на земле, а массы шарика и Земли несоизмеримы. Данный случай проиллюстрирован на рис. 6.

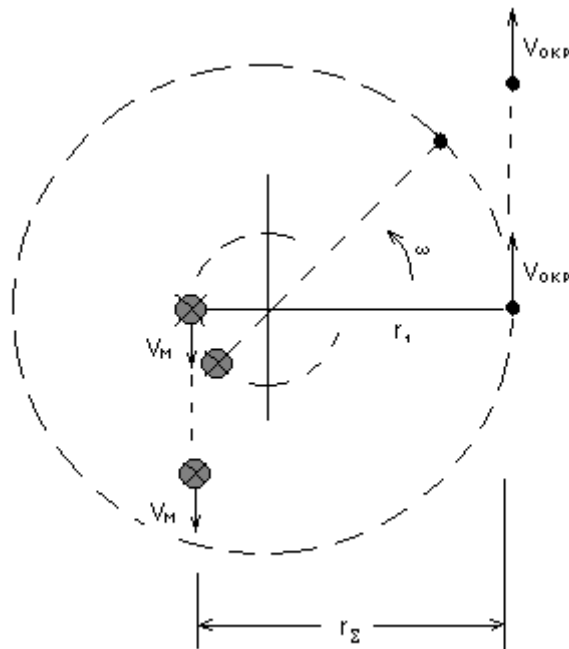


Рис. 6

Но, вообще-то, в таком случае момент должен оставаться (?), так как любое движение является суммой поступательного и вращательного движений (1). Кроме того, куда делась энергия деформации веревки? Она же растянута как пружина.

Странный вариант 3-го закона, однако.

Также можно дополнительно показать (вообще-то, это известно из механики (1, 6)), что координаты центра масс (центра инерции) системы материальных тел не изменяются при изменении конфигурации материальных тел, произошедшей под действием внутренних сил. Например, в случае, когда система материальных тел разлетается в разные стороны по 3-му закону, то получается, что **центр масс остается на прежнем месте.**

Рассмотрим одномерный случай, когда две материальные точки движутся вдоль координатной оси x . При этом исходная координата центра масс

материальных точек будет равна $\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = x_0$. При “разбегании” материальных

точек под действием внутренних сил их координаты меняются за время Δt (вектора скорости V_1 и V_2 направлены в противоположные стороны):

$\frac{(x_1 + \Delta t V_1)m_1 + (x_2 - \Delta t V_2)m_2}{m_1 + m_2} = x_{\Delta t}$. Так как по 3-му закону $m_1 V_1 = m_2 V_2$, то

$$x_{\Delta t} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} + \Delta t \frac{V_1 m_1 - V_2 m_2}{m_1 + m_2} = x_0 + \Delta t \frac{0}{m_1 + m_2} = x_0.$$

Или $\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i (x_i + L_i)}{\sum m_i} = x_0$, где $L_i = \Delta t V_i$ для координаты x и то же для других координат.

Это значит, что координата центра масс не меняется, если движение происходит под действием внутренних сил (по 3-му закону Ньютона).

Получается, что если “Большой взрыв” имел место, что, впрочем, сомнительно, то центр масс Вселенной остался на месте возникновения “Большого взрыва”.

Таким образом, **внутренние силы могут изменить положение материальных тел, входящих в замкнутую систему, но не могут изменить положение центра масс такой системы.** В случае реактивных сил, например, ракетного двигателя, центр масс ракеты и продуктов сгорания остается на месте, хотя эти объекты удаляются друг от друга.

2.1 Переход поступательного движения во вращательное и вращательного в поступательное в замкнутой системе

Вернемся к случаю, приведенному на рис. 4. В данном случае шарик никуда не вылетает и остается в “улитке”. Вообще-то, если шарик там затормозится, то формально этот случай можно было бы представить как неупругий удар, как будто шарик влетел в “черный ящик” и там остался.

А теперь представим, что шарик выстреливается из пистолета, находящегося на той же платформе (рис. 7).

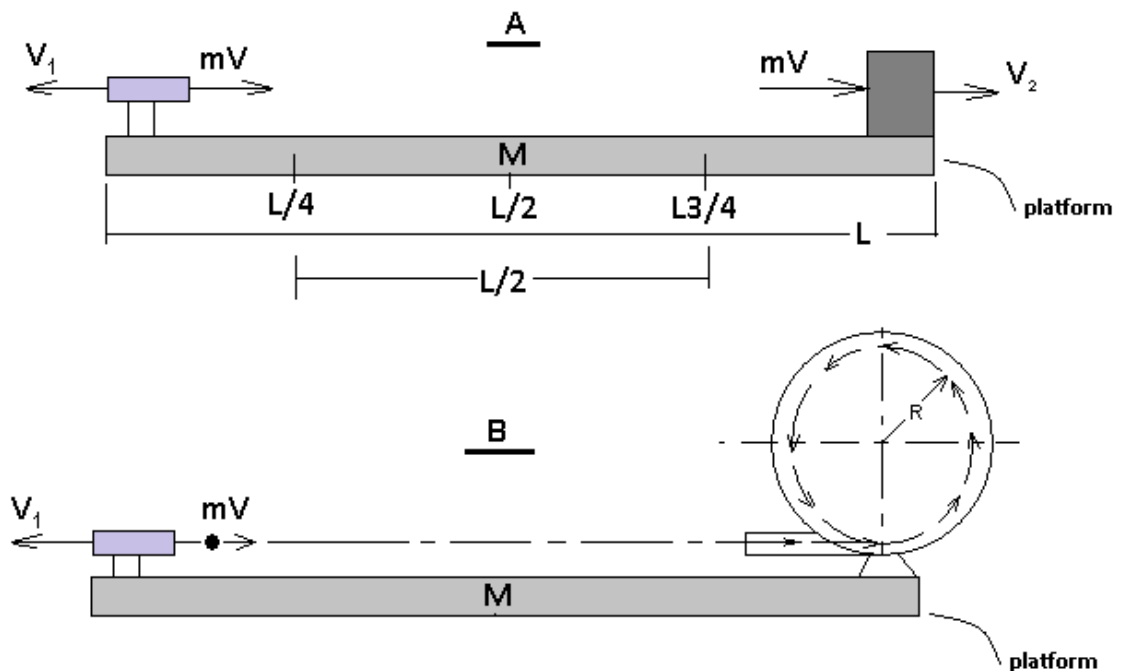


Рис. 7

Вначале рассмотрим случай классического неупругого удара.

Предположим, что пистолет и кусок пластилина расположены на одной платформе (рис. 7А) длиной L и массой M , куда входит масса пистолета и пластилина.

Пистолет выстреливает шарик со скоростью V и массой m . Далее шарик летит,

попадает в пластилин и там тормозится. Так как импульсы равны, то они компенсируют друг друга и платформа немного сдвинувшись останавливается.

Все просто и очевидно, но разберемся в этом случае по-внимательней. При выстреле шариком массой m платформа получает импульс отдачи (количество движения mV), направленный в противоположном направлении вектору скорости V по закону реактивного движения. Во время выстрела на платформу действует ускорение a , которое, согласно уравнению реактивного движения, разгоняет

платформу с пистолетом до $V_1 = V \frac{m}{M}$, передавая ей импульс mV . При этом масса

шарика во время его выстреливания и полета с массой платформы не складывается и в вышеприведенное уравнение не входит (он при выстреле и в полете не связан с платформой). При попадании шарика в пластилин платформа получает импульс mV . Но масса ее сразу же возрастает за счет массы шарика (шарик там застревает) и будет уже не M , а $M_\Sigma = M + m$. Тогда скорость платформы в обратном

направлении будет $V_2 = V \frac{m}{M + m}$. Если масса платформы равна массе шарика, то

$V_1 = V$ и $V_2 = \frac{1}{2}V$. Но если предположить, что масса шарика не фигурирует во

время выстрела и полета, то получается парадокс – платформа продолжит двигаться в направлении V_1 . Если же предположить, что импульс mV в момент вылета действует на суммарную массу платформы вместе с шариком, что, вообще-то, противоречит формуле реактивного движения, то $V_1 = V_2 = V \frac{m}{M + m}$. И в случае,

когда массы шарика и платформы равны, $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}V$. Следовательно, платформа

после попадания шарика остановится. То же будет, если не учитывать массу шарика, попавшего в пластилин.

В этих случаях за время полета шарика $\Delta t = \frac{L}{V}$ путь пройденный платформой будет

$S = V_1 \frac{L}{V} = L \frac{m}{M + m}$, а не $S = L \frac{m}{M}$ (это без учета массы шарика). Тогда, если

$M = m$, то $S = \frac{1}{2}L$. Предположим, что центр масс платформы без шарика

находится посередине платформы (рис. 6А), тогда начальный центр масс (когда шарик в пистолете) находится на расстоянии $L/4$ от начала платформы и при попадании шарика переходит на расстояние $L/4$ (когда шарик в пластилине), то

есть центр масс переместиться на расстояние $\frac{1}{2}L$. В то же время путь пройденный

платформой за время полета как раз равен $S = \frac{1}{2}L$. То есть платформа под

действием внутренних сил переместилась относительно центра масс (или центр масс переместился вдоль платформы из-за перераспределения массы системы, что есть одно и то же). Это похоже на перемещение человека в лодке от носа к корме –

человек движется в одну сторону, а лодка в другую. При этом центр масс сохраняет свое положение относительно воды.

Тогда необходимо ли учитывать массу шарика при выстреле или нет, так как ее учет противоречит формуле реактивного движения? А может не нужно учитывать массу шарика при попадании в пластилин? Это что, опять парадокс?

А теперь предположим, что вместо пластилина шарик попадает в улитку (рис. 7В). Далее предположим, что он там вращается без трения с постоянной скоростью (рис.4). В этом случае силы, приложенные к стенкам улитки по оси X будут уравновешены и никак не будут влиять на движение платформы (только дергать ее взад и вперед если в ней катится один шарик). Следовательно, платформа будет продолжать двигаться под действием полученного при выстреле импульса со скоростью $V_1 = V \frac{m}{M + m}$. При этом шарик никуда не улетает, а

продолжает катиться в улитке. Вроде бы получается безопорное движение под действием внутренних сил. Но это до того момента, когда шарик начнет тормозиться. Тогда баланс сил в улитке нарушается, появится импульс, направленный в противоположную сторону исходному и платформа начнет тормозиться. И когда шарик полностью затормозится, тогда платформа остановится, но при этом пройдет некий путь.

Вообще-то, количество движения “улитки” с шариком должно было бы быть равно исходному количеству движения влетающего шарика mV , как при неупругом ударе. Но это в случае, когда шарик там затормозился. Но выше по тексту показано, что в случае безостановочного движения шарика в улитке с постоянной скоростью, силы, приложенные к улитке скомпенсированы и она не движется и никак не действует на платформу. Кроме того, поступательная кинетическая энергия шарика тождественно переходит в его вращательную энергию и на движение “улитки” под действием вращающегося в ней шарика ничего не остается (см. раздел 2, формула 2.8). И когда шарик остается вращаться в улитке без сопротивления, то улитка как бы запасает кинетическую энергию и, если ее открыть, то эта энергия переходит в кинетическую энергию движения, как приведено на рисунках 5А, 5В, 5С. Теперь представим, что шарик в улитке затормозился и платформа остановилась, причем это время торможения достаточно большое. Теперь достанем шарик из улитки и перенесем его к пистолету. Платформа сдвинется назад из-за перераспределения масс (как движение лодки при перемещении в ней человека, см случай выше по тексту), но это обратное движение будет меньше, чем путь, пройденный платформой за время торможения шарика. Теперь выстрелим опять и т.д.

Тогда получается, что система, изображенная на рис. 6, является как бы инерциоидом без отброса массы? То есть, система консервирует кинетическую энергию и количество движения шарика и платформа будет двигаться поступательно до тех пор пока шарик не остановится? И это тоже парадокс, не так ли?

Конечно, можно предположить, что шарик вначале попадает на стенку улитки, противоположную пистолету. Это вначале дает противоимпульс $2mV$ (см. рис. 5В), а затем шарик совершает целое число оборотов со взаимной

компенсацией сил, приложенных к улитке. А при бесконечном количестве оборотов получается, что число оборотов будет как бы $\infty + \frac{1}{2}$? Но в этом случае получается, что противоимпульс $2mV$ от первой половины улитки больше исходного импульса mV (см. рис. 5B)? Что-то здесь не сходится. И вообще-то, это не мешало бы проверить экспериментально.

2.2 Возможно ли механическое безопорное движение на основе инерциоидов

Изобретатели безопорных движителей часто используют механические устройства - инерциоиды, основанные на вращательном движении, в которых некий предмет, например шарик, движется в изогнутой трубе (по направляющей) с разной кривизной. Рассмотрим один из таких вариантов.

На рис. 8 приведен один из вариантов инерциоида с эксцентриком: Некий груз массой m движется по эллиптической траектории в некой трубке, изогнутой в форме эллипса, с постоянной угловой скоростью относительно одного из фокусов. Это также может быть мотор, вращающий груз, находящийся на конце рычага переменной длины (R_φ). При этом мотор находится, например, в левом фокусе эллипса. Расстояние R_φ от фокуса эллипса до груза меняется контролируемым выдвиганием рычага по мере его вращения. Определим суммарный импульс силы, приложенный к направляющей по оси X.

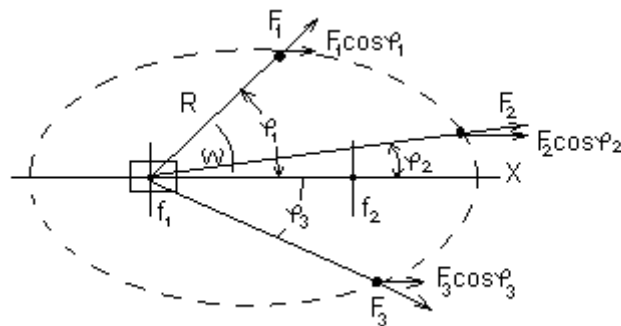


Рис. 8

Рассмотрим этот вариант в предположении, что угловая скорость постоянна ($\omega = \text{const}$). То есть, электромотор на рис. 8 крутит рычаг переменной длины, к которому прикреплен груз массой m с постоянной угловой скоростью ω .

Формально можно предположить, что сила, приложенная к правому участку больше силы, приложенной к левому участку: $ma_R > ma_L$ и так как $R_R > R_L$.

Импульс силы, действующий на рычаг в направлении оси X во время вращения груза определяется по формуле: $dp = F_t dt = ma_t \cos \varphi dt$

Так как $dt = \frac{d\varphi}{\omega}$, то $F_t dt = ma_t \cos \varphi \frac{d\varphi}{\omega} = m\omega R_\varphi \cos \varphi d\varphi$, при $\omega = \text{const}$.

Уравнение эллипса в полярных координатах имеет вид $R_\varphi = \frac{P}{1+e \cos \varphi}$, где $P = \frac{b^2}{a}$ -

параметр эллипса, $e = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет эллипса. Полюс находится в левом фокусе эллипса.

Тогда импульс силы, приложенный к системе в направлении оси X, соединяющей фокусы эллипса, будет равен $dp = F_t dt = m\omega P \frac{\cos \varphi}{1+e \cos \varphi} d\varphi$, опять же при $\omega = const$.

Интегрируя получим: $Ft = m\omega P \left[\frac{\varphi}{e} - \frac{1}{e} \int \frac{d\varphi}{1+e \cos \varphi} \right]_0^\varphi$

И при полном обходе:

$$Ft = m\omega P \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{e} \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1-e) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-e^2}} \right]_0^{2\pi}$$

Предположим, что эксцентриситет эллипса направляющей равен $e = 0.5$:

$$Ft = m\omega P \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{0.5} \frac{2}{\sqrt{0.75}} \operatorname{arctg} \frac{0.5 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{0.75}} \right]_0^{2\pi}.$$

Тогда импульс силы при полном обходе груза по эллиптической траектории составит:

$$Ft = m\omega P \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{2}{0.43} \operatorname{arctg} 0.57 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = m\omega P \pi \quad (\text{второй член под скобками равен}$$

нулю) с размерностью $\left[kg \frac{m}{\text{sec}^2} \frac{\text{sec}}{\text{rad}} \operatorname{rad} \right] = [N \times \text{sec}]$, так как $a_c = \omega^2 R$ и

$$\omega R = \frac{a_c}{\omega} = \frac{m}{\text{sec}^2} \frac{\text{sec}}{\text{rad}}.$$

Следовательно, на систему при полном обходе грузом при постоянной угловой скорости ω действует импульс силы $Ft = m\omega P \pi$. И этот импульс пропорционален параметру эллипса P.

Таким образом, вроде бы получается, что на основе устройства, приведенного на рис.8, можно было бы создать безопорный механический движитель. Но, в случае с мотором, при вращении рычага с грузом вся система (платформа, на которой закреплен мотор) будет вращаться в противоположном направлении и суммарный импульс быть направлен в разные стороны (система будет «дергаться» в разные стороны).

В этом случае получается, что суммарный импульс по оси X будет равен нулю? Предположим, что мотор, вращающий грузик, закреплен на некой платформе с моментом инерции J_1 . Тогда угловая скорость вращения платформы ω_1 будет

определяться как $\omega_1 = \frac{J}{J_1} \omega$ или $\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{J_{(t)}}{J_1} \omega$ так как при вращении грузика на

рычаге меняется его момент инерции $J = mR_{(t)}^2$ и $\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{J_{(t)}}{J_1} \omega = \frac{m\omega}{J_1} R_{(t)}^2$ или

$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega \frac{m}{m_1} \frac{R_{(t)}^2}{R_1^2}$, считая, что приведенный момент инерции платформы образуется

материальной точкой с постоянной массой m_1 на постоянном расстоянии R_1 . При этом масса вращающегося грузика m также постоянна. Тогда угол, пройденный

платформой будет $\varphi_1 = \frac{m\omega}{J_1} \int_{t_1}^{t_2} R_{(t)}^2 dt = \frac{m}{J_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R_{(\varphi)}^2 d\varphi$, где $R_{\varphi} = \frac{P}{1 + e \cos \varphi}$.

Но, если вращение системы (платформы с мотором) синхронизировать с вращением груза (их угловые скорости направлены в противоположном направлении), то есть подобрать соответствующим образом момент инерции платформы, то импульс может быть направлен в одном направлении. Для этого

должно выполняться условие: $2\pi = \frac{m\omega}{J_1} \int_{t_1}^{t_2} R_{(t)}^2 dt = \frac{m}{J_1} \int_0^{2\pi} R_{(\varphi)}^2 d\varphi$ или $J_1 = \frac{m}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{(\varphi)}^2 d\varphi$.

Вообще-то, чтобы остановить вращение можно было бы пустить второй груз в противоположном направлении, но тогда импульсы силы будут вычитаться и, соответственно, импульс опять будет равен нулю. В принципе, можно было бы компенсировать вращение вторым грузом, вращающимся другим мотором в противоположном направлении. Но его крутящий момент должен быть переменным чтобы компенсировать момент, создаваемый первым грузом. Соответственно, импульс силы будет скомпенсирован и суммарная сила по X, будет равна нулю.

Следовательно, работоспособность схемы, приведенной на рис. 8, как беспорный двигатель, находится под сомнением и, скорее всего, она будет только «дергаться» относительно неподвижного центра масс (см. Раздел 2). Но, возможно, система будет работать, если ее поставить на рельсы, препятствующие вращению. Но такая система будет уже незамкнутой. Так ли это?

Рассмотрим другой вариант, приведенный на рис. 9.

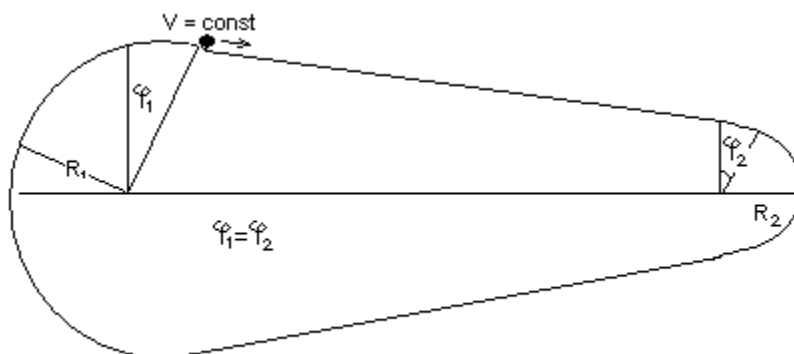


Рис. 9

Две окружности с разным радиусом соединены касательными и вдоль этих линий катится шарик с постоянной скоростью V . Ускорения при движении шарика по окружностям получаются разные, так как $a_c = \frac{V^2}{R}$ ($V = \text{const}$). Если радиусы равны, то очевидно, что силы, приложенные к окружностям тоже равны и суммарная сила равна нулю.

Но когда радиусы разные, то может показаться, что силы, приложенные по оси X тоже разные. Кроме того, путь (угловой), пройденный по левой окружности больше, чем для правой окружности (см. Рис. 9).

Согласно формуле 2.1 импульс силы равен

$$Fdt = ma_c \frac{1}{\omega} \sin \varphi d\varphi = m \frac{R V^2}{V R} \sin \varphi d\varphi = mV \sin \varphi d\varphi, \text{ а проекция на ось } X \text{ будет равна}$$

$$Fdt = mV \sin \varphi \cos \varphi d\varphi. \text{ Тогда } Ft = mV \int_0^{\Delta\varphi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} mV \int_0^{\Delta\varphi} \sin 2\varphi d\varphi.$$

В эти уравнения радиус не входит, в входит только пройденное шариком угловое расстояние. Как видно из рис. 9, угловое расстояние, пройденное шариком по большому радиусу несколько больше (на $\Delta\varphi$), чем расстояние, пройденное по малому радиусу на ту же $\Delta\varphi$. При этом, сила, приложенная к участку большой окружности с $\Delta\varphi$, направлена вправо по оси X . Тогда эта сила складывается с силой, приложенной вправо по X к полуокружности с малым радиусом (которая меньше π на $\Delta\varphi$) и получается, что силы, приложенные к полуокружностям равны и компенсируют друг друга. Следовательно, суммарная сила будет равна нулю.

А вот в этом случае из установке на рис. 9 принципиально нельзя получить безопорный двигатель.

Теперь рассмотрим вариант инерциоида, где используется движение шарика (жидкости) по спирали (рис. 10).

Этот вариант иногда предлагается авторами инерциоидов как возможность получения безопорного движения.

Предположим, что угловая скорость шарика постоянна $\omega = \text{const}$.

Уравнение спирали Архимеда имеет вид: $\rho = \frac{a}{2\pi} \varphi$, где ρ – радиус-вектор, соединяющий центр с точкой на спирали, a – шаг спирали за один оборот.

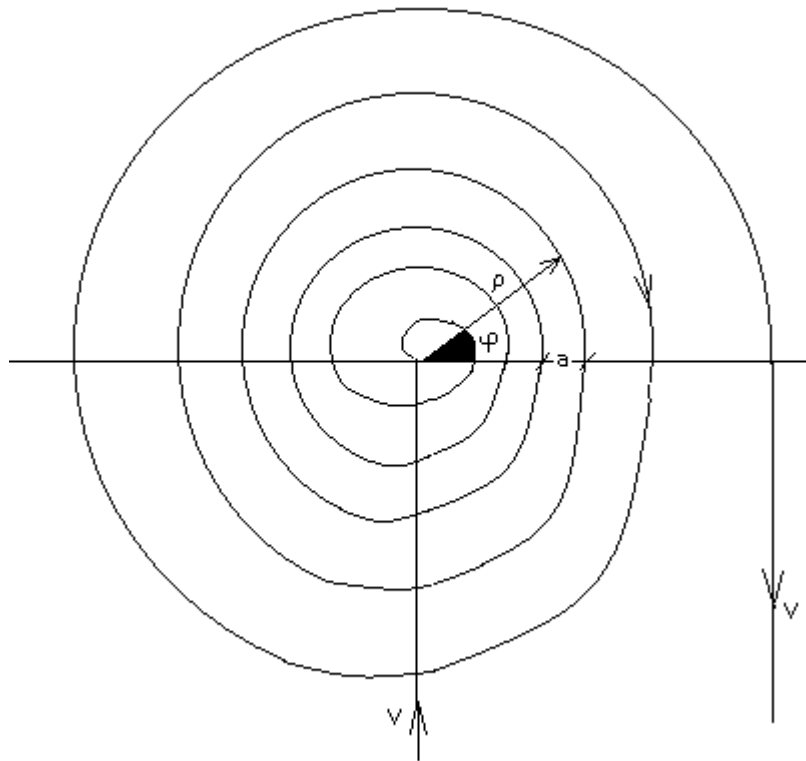


Рис. 10

Считаем, что $R_\varphi = \rho_\varphi$, $\omega = \text{const}$.

Тогда сила, направленная по оси Y будет равна:

$$dF_\varphi = mV\omega \sin \varphi d\varphi = m\omega^2 R_\varphi \sin \varphi d\varphi = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} \varphi \sin \varphi d\varphi \text{ и } F_{\varphi X} = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} \int_0^\varphi \varphi \sin \varphi d\varphi.$$

$$\text{Тогда } F_{\varphi Y} = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} \int_0^\varphi \varphi \sin \varphi d\varphi = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} [\sin \varphi - \varphi \cos \varphi]_0^\varphi.$$

При прохождении шариком половины оборота (от 0 до π) получим:

$$F_{\varphi Y} = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} \int_0^\pi \varphi \sin \varphi d\varphi = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} [\sin \varphi - \varphi \cos \varphi]_0^\pi = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} [0 + \pi] = \frac{1}{2} m\omega^2 a, \text{ и}$$

$$\text{размерность будет: } \left[\frac{\text{kg} \times \text{m}}{\text{sec}^2} \right] = [\text{N}]$$

При одном обороте (от 0 до 2π) получим:

$$F_{\varphi Y} = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \sin \varphi d\varphi = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} [\sin \varphi - \varphi \cos \varphi]_0^{2\pi} = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} [0 - 2\pi - 0 + 0] = -m\omega^2 a$$

$$\text{при двух оборотах } F_{\varphi Y} = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} [\sin \varphi - \varphi \cos \varphi]_0^{4\pi} = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} [0 - 4\pi] = -2m\omega^2 a,$$

$$\text{при трех оборотах } F_{\varphi Y} = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} [\sin \varphi - \varphi \cos \varphi]_0^{6\pi} = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} [0 - 6\pi] = -3m\omega^2 a \text{ и т.д.}$$

Тогда $F_{\varphi Y} = -n \times m\omega^2 a$, где n - число полных оборотов.

В принципе, результат понятен – центробежное ускорение $a_c = \omega^2 R$ при $\omega = \text{const}$ пропорционально радиусу кривизны R , который увеличивается при каждом обороте.

Сила, приложенная к спирали по X будет:

$$F_{\varphi X} = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} \int_0^{\varphi} \varphi \cos \varphi d\varphi = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} [\cos \varphi + \varphi \sin \varphi]_0^{\varphi} \text{ и при полном обороте составит}$$

$$F_{\varphi X} = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} [\cos \varphi + \varphi \sin \varphi]_0^{2\pi} = m\omega^2 \frac{a}{2\pi} [1 - 1] = 0. \text{ Это значит, что сила будет}$$

направлена только вниз по Y . Кроме того, если спиральное движение грузика обеспечивается за счет вращения рычага, длина которого меняется согласно формуле спирали Архимеда (как на рис.8), то вся система будет вращаться в обратную сторону.

Вообще-то, здесь необходимо отметить, что в этих вычислениях есть одна неточность – радиус-вектор ρ , соединяющий центр с точкой на спирали только примерно равен радиусу кривизны спирали R в данной точке, в то время, как в формулу центробежного ускорения входит радиус кривизны. Он становится близок к радиусу кривизны при малой кривизне спирали. Но, тем не менее, полученные выражения позволяют оценить силу, возникающую при движении шарика или жидкости по спирали.

Но эти оценки относятся к случаю, когда система не замкнутая, в то время, как в замкнутой системе необходимо учитывать возврат шарика или жидкости к началу спирали.

То есть, не нужно забывать об обратном пути шарика или жидкости. В частности, для случая вращающегося рычага это будет обратная спираль и, если угловая скорость вращения ω останется прежней, то **сила, приложенная к спирали, будет полностью скомпенсирована**, и это даже если изменить шаг обратной спирали (число оборотов уменьшится, но настолько же увеличится шаг спирали a). То же относится к шарикам, движущимся в спиральной трубе и к текущей в ней жидкости. Там могут быть другие пути возврата, но результат останется прежним.

Таким образом, инерциод, основанный на спирали с постоянной угловой скоростью ω , работать как безопорник не будет.

Теперь предположим, что скорость шарика или жидкости, текущей в спирали постоянна $V = \text{const}$, что более подходит для движения жидкости в трубе постоянного диаметра.

Тогда сила, направленная по Y будет

$$dF_{\varphi Y} = mV\omega_{\varphi} \sin \varphi d\varphi = mV^2 \frac{1}{R_{\varphi}} \sin \varphi d\varphi = mV^2 \frac{2\pi}{a} \frac{1}{\varphi} \sin \varphi d\varphi \text{ и}$$

$$F_{\varphi Y} = mV^2 \frac{2\pi}{a} \int_0^{\varphi} \frac{1}{\varphi} \sin \varphi d\varphi. \text{ Данный интеграл является интегральным синусом и его}$$

решение представляет собой ряд: $Si = \varphi - \frac{\varphi^3}{3 \times 3!} + \frac{\varphi^5}{5 \times 5!} - \frac{\varphi^9}{9 \times 9!} \dots$, тогда

$$F_{\varphi} = mV^2 \frac{2\pi}{a} \int_0^{\varphi} \frac{1}{\varphi} \sin \varphi d\varphi = mV^2 \frac{2\pi}{a} Si_0^{\varphi} \approx mV^2 \frac{2\pi}{a} \left[\varphi - \frac{\varphi^3}{3 \times 3!} + \frac{\varphi^5}{5 \times 5!} - \frac{\varphi^9}{9 \times 9!} \dots \right]_0^{\varphi}.$$

Пользуясь интернетным калькулятором определим значения Si для 2π , 4π и 6π (17). Они будут равны 1.42, 1.49, 1.51 соответственно, а при $\varphi \rightarrow \infty$ $Si = \frac{\pi}{2}$.

Получается, что увеличение числа оборотов спирали не дает ничего и

$$F_{\varphi Y} = mV^2 \frac{2\pi}{a} \int_0^{\varphi} \frac{1}{\varphi} \sin \varphi d\varphi \approx mV^2 \frac{2\pi}{a} \frac{\pi}{2} = mV^2 \frac{\pi^2}{a} \text{ при любом количестве оборотов.}$$

Соответственно, сила, направленная по оси X будет

$$dF_{\varphi X} = mV \omega_{\varphi} \cos \varphi d\varphi = mV^2 \frac{1}{R_{\varphi}} \cos \varphi d\varphi = mV^2 \frac{2\pi}{a} \frac{1}{\varphi} \cos \varphi d\varphi \text{ и}$$

$$F_{\varphi X} = mV^2 \frac{2\pi}{a} \int_0^{\varphi} \frac{1}{\varphi} \cos \varphi d\varphi = mV^2 \frac{2\pi}{a} Ci_0^{\varphi}, \text{ где } Ci \text{ - интегральный косинус. Пользуясь}$$

калькулятором определим значения Ci для 2π , 4π и 6π (18). Они все равны нулю, также, как и все кратные 2π . Следовательно, силы, направленной по оси X нет.

Обратный путь жидкости в замкнутой системе тоже будет представлять собой обратную спираль и небольшой выигрыш в силе за счет одного оборота спирали будет скомпенсирован.

Тогда получается, что спираль с жидкостью, текущей с постоянной скоростью $V = const$ также не может быть использована как инерциоид, обеспечивающий безопорное движение.

3. Тангенциальное ускорение при вращении тел в перпендикулярных направлениях

Продолжим рассмотрение случаев взаимоперехода поступательного движения во вращательное (и вращательного в поступательное). Вернемся к случаю, аналогичному представленному на рис. 4. Теперь рассмотрим случай, когда “улитка” с шариком (см. рис. 4) переворачивается, то есть вращается вокруг оси, проходящей по ее диаметру.

Предположим, что есть некая трубка в форме кольца, которая не вращается вокруг своей оси и в которой без сопротивления с постоянной скоростью V движется некое материальное тело, например, катится шарик (или течет вода). И это кольцо переворачивается, то есть вращается вокруг оси, проходящей по ее диаметру (схема приведена на рис. 11, 12). Тогда получается, что шарик движется по кольцу и одновременно вращается вместе с ним. При этом вектора угловых скоростей шарика и кольца взаимно перпендикулярны $\vec{\omega}_1 \perp \vec{\omega}_2$, где $\vec{\omega}_1$ - угловая скорость вращения шарика в трубке, а $\vec{\omega}_2$ - угловая скорость вращения кольца. В таком случае получается, что тангенциальное ускорение шарика, направленное вдоль трубки, должно отсутствовать, так как все ускорения являются результатом вращательного движения и направлены перпендикулярно стенкам трубки и их тангенциальные проекции отсутствуют. В то же время, можно показать, что такие ускорения имеют место.

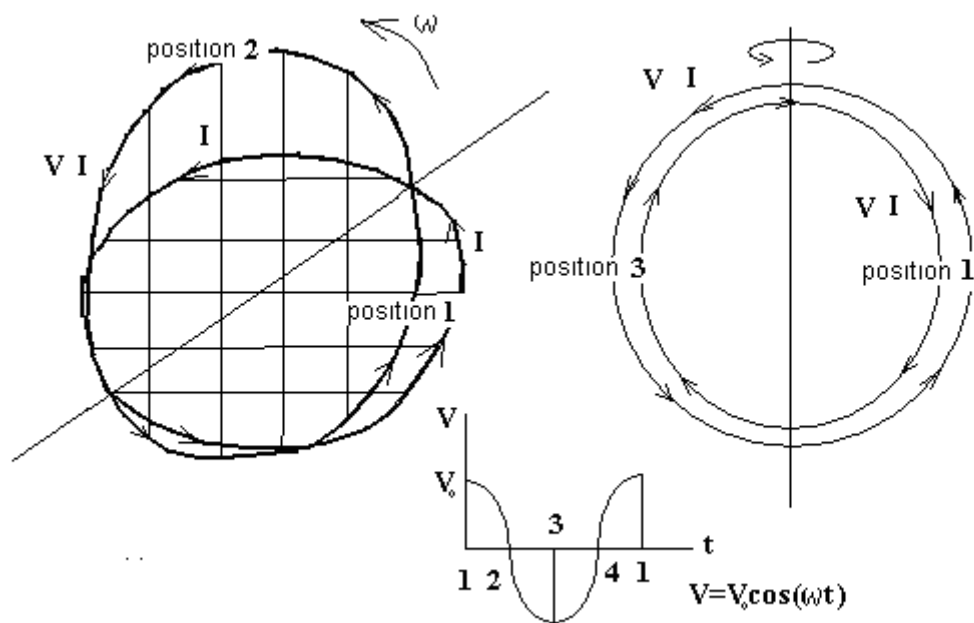


Рис. 11

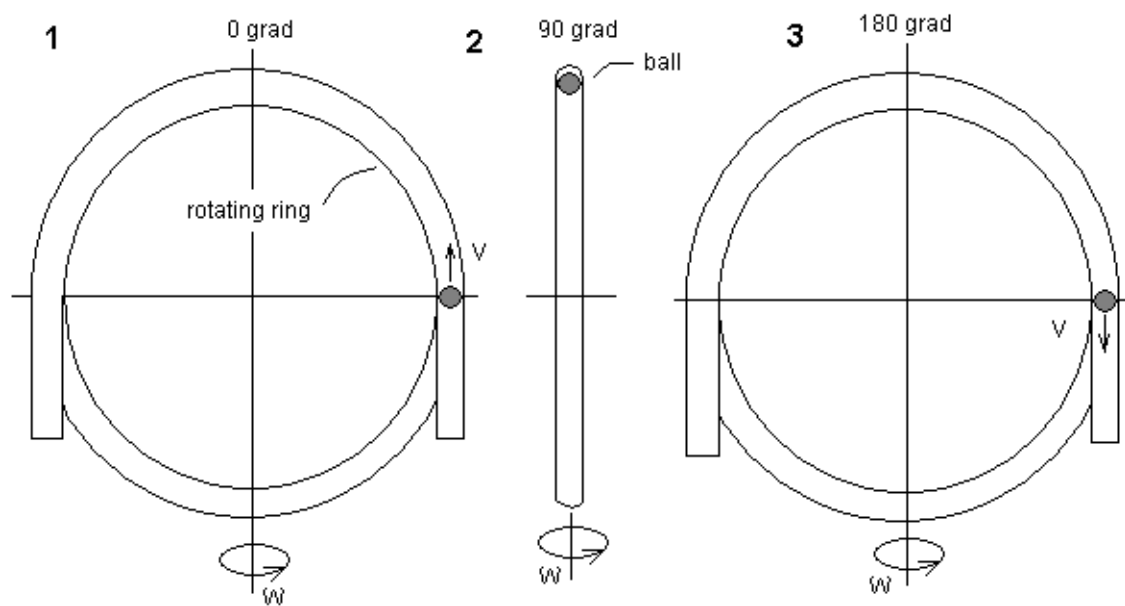


Рис. 12

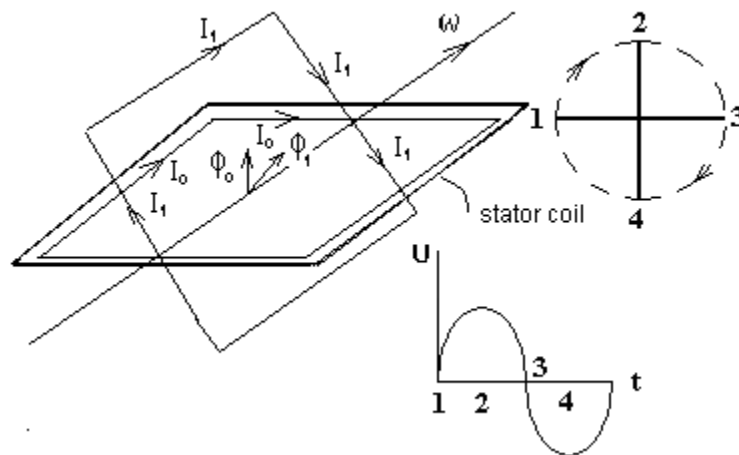


Рис. 13

Далее предположим, что это трубчатое кольцо, которое, опять же, не вращается вокруг своей оси, изначально расположено в горизонтальной плоскости (положение 1 на рисунке 11, 12). В нее встреливается шарик со скоростью V . Начинаем вращать кольцо вокруг оси, расположенной по диаметру, таким образом, что шарик совершает полный оборот за время, за которое кольцо повернется на 360 градусов. Будем вращать кольцо вокруг оси (переворачивать его) до тех пор, пока оно не повернется на 180 градусов (положение 3 на рисунке 11, 12) и не вернется опять в горизонтальную плоскость. При этом вектор угловой скорости шарика (воды) ω повернется на 180 градусов. Нетрудно видеть, что теперь скорость шарика (воды) осталась прежней V , но оказалась направленной в противоположную сторону.

Это же относится и к рамке с текущим в ней постоянным током (рис.13). В этом случае (рис. 13) при повороте на 180 градусов ток течет в противоположную сторону (хотя сила тока и его направление вдоль рамки не изменилась), а магнитный поток при этом (и магнитный момент) меняет направление на противоположное. Если в горизонтальной плоскости рядом с вращающейся рамкой расположить проводящий контур (рис.13), то в нем будет наводиться ЭДС из за изменения магнитного потока через этот контур, что очень широко используется на практике в синхронных генераторах.

Но получается, что изменение скорости шарика на противоположное может произойти только если шарик (элемент жидкости или электроны проводимости в рамке с током) во время поворота испытывал **ускорение, направленное вдоль контура**. С точки зрения механики это выглядит достаточно странно, так как скорость движения шарика (и сила тока в рамке) в плоскости контура не меняется, а меняется только проекция скорости на горизонтальную плоскость. В то же время, можно сделать эксперимент, когда шарик физически переносится из положение 1 (см. рис.12) в положение 3, изменяя при этом скорость движения на противоположную. **То есть, это физическая реальность.** Данный случай

отличается от случая, описанного в разделе 1, где направление вектора окружной скорости меняется на противоположное в диаметрально противоположной точке окружности. В данном же случае направление меняется в той же точке пространства.

В принципе, при вращении такого контура из положение 1 в положение 3, вектор ω , опять же, поворачивается на 180 градусов и возникает гироскопический момент (1, 9), но, при этом, сила (момент) приложена к оси, перпендикулярной плоскости контура (препятствует повороту), а не к элементу на ободу (и не направлена вдоль обода). При движении шарика во вращающемся кольце возникает кориолисово ускорение $\vec{a}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{V}$ (1, 9). Как видно из формулы, это ускорение всегда направлено перпендикулярно вектору скорости шарика \mathbf{V} . Оно приложено к кольцу перпендикулярно его элементу и тормозит его поворот. Но, при этом, его проекция на направление движения шарика \mathbf{V} равна нулю и никак не сказывается на движении шарика внутри кольца – не тормозит и не разгоняет его.

Но, так или иначе, получается, что фактическое выражение для скорости шарика (жидкости) будет следующим:

$$V = V_0 \cos(\omega t) \quad [3.1],$$

где ω – угловая скорость вращения рамки.

Тогда выражение для ускорение шарика (жидкости) будет:

$$\frac{dV}{dt} = a = -V_0 \omega \sin(\omega t) \quad [3.2]$$

Опять же, формально V являются проекцией окружной скорости шарика \mathbf{V} на горизонтальную плоскость. Соответственно, проекция вектора скорости \mathbf{V} на горизонтальную плоскость проходит через нуль когда кольцо расположено под 90 градусов к горизонтальной плоскости (положение 2 на рис. 11, 12). А при повороте на 180 градусов кольцо **физически** располагается в горизонтальной плоскости (положение 3 на рис. 11, 12), но скорость шарика (жидкости) **направлена в противоположную сторону. Опять же, фактически получается, что шарик затормозился до нуля и снова разогнался, но в противоположную сторону (?)**. Следовательно, кольцо можно затормозить в этом положении и из него вылетит шарик со скоростью V (рис. 12) из той же точки где он влетел, но в направлении, противоположном начальному.

С точки зрения сохранения импульса это выглядит как упругий удар, при котором шарик влетает в некий черный ящик, отталкивается от его стенки и через некоторое время вылетает обратно с тем же количеством движения (см. рис. 5B в параграфе 2). В случае упругого удара шарик в момент соударения со стенкой тормозится до нуля и снова разгоняется за счет ее упругости. Но вот в случае, описанном в данном параграфе, шарик не соударяется ни с какой стенкой и, в отличии от случая описанного в разделах 1 и 2, опять же, вылетает из той же точки пространства, где он влетел в кольцо.

То есть получается, что при повороте кольца (кольцевой трубки) вокруг оси вращения из положение 1 в положение 3, движущиеся в нем элементы (шарик, вода) как бы тормозятся и далее снова разгоняются ? Это же относится к элементам любого вращающегося в двух плоскостях тела, например, к диску гироскопа. Парадокс, однако.

4. Качели

Одним из парадоксов классической механики являются качели, особенно те, у которых качающийся связан с перекладиной веревкой или цепью. Очевидно, что сила, связывающая качающегося с перекладиной может быть направлена только вдоль веревки и не может быть никаких сил, направленных по касательной к траектории качания. Также очевидно, что эта сила не производит момента сил (он равен нулю) и не может увеличить амплитуду качания. Единственным вариантом является тангенциальная сила, приложенная непосредственно к качающемуся. Вообще-то, качели являются **классическим маятником, находящимся в потенциальном поле и не являющимся замкнутой системой**. В литературе раскачивание качелей объясняется параметрическим резонансом (7, 9), когда, например, к грузу маятника прикреплен другой маятник. В частности, размахивание руками в такт движению ускоряет и облегчает движение, что очень легко проверить (опять же, параметрический резонанс).

5. “Нулевая” (невозмущенная) траектория

Прочитав 1-й закон Ньютона: *“Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения”*.

Но во Вселенной не существует тел, к которым не приложены никакие силы. Но если силы, приложенные к телу, скомпенсированы (взаимно уравновешены), то оно движется по некоей невозмущенной (далее проходит под названием “нулевой”) траектории и на всей траектории движения отсутствует ускорение, приложенное к телу. При этом отсутствует и силы, механически действующие на части данного тела – растягивающие или сжимающие его, то есть, меняющие его конфигурацию (на тело и его элементы действует невесомость). Но это **не является “равномерным прямолинейным движением”**. Идеальными (не реализующимися никогда) случаями такого движения являются равномерное прямолинейное движение и **вращение по круговой траектории вокруг гравитирующего тела**. В реальности же движение тела всегда является **комбинацией этих двух случаев и тело движется по некоей криволинейной траектории, имеющей радиус кривизны**. И в каждой точке “нулевой” траектории соблюдается равенство $\sum \vec{F}_i = 0$, то есть **векторная сумма всех приложенных сил равна нулю**. Это равенство однозначно формирует траекторию тела и оно не может ее покинуть без приложения дополнительной силы. Тело, движущееся по “нулевой” траектории, может при движении менять направление и скорость $m\vec{V} \neq const$; силы, действующие на тело могут быть переменными во времени, но, опять же, в каждый момент времени они должны быть скомпенсированы и, соответственно, **по всей “нулевой” траектории должно соблюдаться условие $\sum \vec{F}_i = 0$ и, кроме того, полная энергия тела (гамильтониан) при движении тела по “нулевой” траектории постоянна $H = U + T = const$ ($\delta H = 0$, (1))**. А, так как любое тело во Вселенной всегда движется в потенциальном поле, то при движении

постоянно происходит перераспределение кинетической и потенциальной энергии, но, опять же, суммарная энергия остается постоянной. Примером является эллиптическая траектория тела, вращающегося вокруг центра гравитации. **Тело же меняет траекторию только тогда, когда появляется нескомпенсированная сила, приложенная к телу $\sum \vec{F}_i + \vec{F}_{ncomp} \neq 0$.** Тогда на тело действует ускорение

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}_i + \vec{F}_{ncomp}}{m}.$$

После прекращения действия этой силы тело переходит на другую “нулевую” траекторию, где, опять же, соблюдается условия $\sum \vec{F}_i = 0$ и

$H_1 = U_1 + T_1 = const$, но с другими значениями кинетической и потенциальной энергии U_1 и T_1 .

Так как все во Вселенной совершает вращательное движение на всех уровнях (от галактик до элементарных частиц), как вокруг гравитирующего тела, так и вокруг своей оси, то в природе не существует “инерциальных систем отсчета” и эти “инерциальные системы отсчета” является очень существенным упрощением и приближением к реальному закону движения тел.

Тогда формулировку 1-го закона следует уточнить: *Материальные точки (тела), когда на них не действуют нескомпенсированные силы, находятся в движения по криволинейной траектории на которой соблюдаются условия: векторная сумма всех приложенных сил равна нулю $\sum \vec{F}_i = 0$ и полная энергия тела постоянна $\delta H = 0$.*

Далее, опять же, можно было бы предположить, что принципиально не существует ни равномерного и прямолинейного движения, ни вращения по идеальной круговой траектории и что **все движение, так или иначе, является вращательным вокруг неких близких или удаленных центров кривизны** (тело за пределы Вселенной выйти не может) и, таким образом, например, траектория тела от точки А до Б всегда является отрезком некой траектории со своим радиусом кривизны. Аналогом является контур с постоянным током, который обязан быть где-нибудь замкнут (иначе ток не потечет).

Одно замечание: В то же время, существует так называемый гравитационный маневр, когда космический аппарат (или некое космическое тело) использует притяжение движущейся планеты для поворота и изменения скорости движения по траектории (планета как бы тянет его за собой). При этом возрастает полная энергия тела (по закону сохранения полная энергия планеты уменьшается на ту же величину). Все это можно было бы представить, как действие сторонней силы. Но возникает вопрос, а действует ли в этом случае на тело нескомпенсированная сила? Если действует, то действует ли на элементы тела перегрузка (отсутствует ли там невесомость), так как $\sum \vec{F}_i \neq 0$?

6. К вопросу о введении “ложных” (лишних) сущностей в физику *Frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora*

“Если какое-то явление может быть объяснено двумя способами, например, первым — через привлечение сущностей (терминов, факторов, преобразований и т. п.) А, В и С, а вторым — через А, В, С и D, и при этом оба способа дают

одинаковый результат, при прочих равных условиях следует считать верным первое объяснение, то есть сущность D — лишняя, и её привлечение избыточно”. (13)

Из термеха известно, что траектория тела может быть описана (определена) при помощи функции Лагранжа L (1, 3) (здесь $L = T - U$ - равна разности кинетической и потенциальной энергии движущегося тела) по философскому принципу минимизации действия S (принципу, восходящему еще к схоластам) при $\delta S = 0$ (1, 3), где $\delta S = S_{(t+\delta t)} - S_t = 0$ (то есть δS фактически является

дифференциалом S при $\delta t \rightarrow 0$), где

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L_{(t)} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{mV^2}{2} - mgh \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{mV_{(t)}^2}{2} dt - \int_{t_1}^{t_2} mgh_{(t)} dt$$

в гравитационном поле Земли. И

при отсутствии потенциального поля $S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{mV_{(t)}^2}{2} dt = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} V_{(t)}^2 dt$ и в этом случае

$$\delta S = S' \delta t = \frac{m}{2} (V_{t_2}^2 - V_{t_1}^2) = 0 \text{ при } (t_2 - t_1) \rightarrow 0, \text{ тогда } V \text{ не меняется за время } (t_2 - t_1)$$

и $V = const$. Вывод получается очевидным и тривиальным, так как теоретически при отсутствии потенциального поля и внешней силы тело движется равномерно и прямолинейно и, соответственно, кинетическая энергия и скорость тела не меняется.

Нужно отметить, что действие S в формализме Лагранжа есть функция интегральная и весьма странная – интеграл энергии за время $t_2 - t_1$, который не имеет и не может иметь физического смысла. Вообще-то, производная энергии по времени есть мощность (ватт = дж/сек), произведение (интеграл) мощности по времени – есть энергия тела (дж), а вот что такое действие S ($J \times \text{сек}$), не знает никто (наверное, не знал и сам Лагранж). Другого интеграла – произведения энергии на время действия быть не может и оно (S) - это математическая химера, которая не имеет и не может иметь физического смысла.. В то же время, при некоторых преобразованиях лагранжева механика превращается в ньютонову и позволяет упростить запись и облегчить решения. Кстати, в лагранжевой механике отсутствует сила как физическая величина.

В связи с вышесказанным необходимо отметить, что любой математический формализм в физике обязан иметь физический смысл, иначе это пустая и вредная химера, уводящая в болото (математики в своей математике могут делать все, что угодно – «бумага все стерпит», но на физику это не распространяется).

Таким образом, лагранжева механика подпадает под определение “лишней сущности”, так как является ньютоновой механикой, но только в другой записи, не дающей ничего нового, кроме упрощения записи.

Далее (исторически) последовала гамильтонова механика (1, 4), где гамильтонианом является $H = pV - L_t = mV^2 - L_t = T + U$, что более логично, так как определяет полную энергию тела и ее изменение во времени. После некоторых преобразований гамильтонова механика тоже переходит в ньютонову: “В целом,

есть небольшой выигрыш в работе от решения проблемы в гамильтоновом, а не в лагранжевом формализме, хотя в конечном счёте это приводит к тем же решениям, что и лагранжева механика и [законы движения Ньютона](#).” (4)

Теперь уже прошло почти 200 лет и все с нетерпением ждут еще одной механики, ведь нельзя же останавливаться.

Но идея, заложенная в лагранжевой механике, оказалась заразной. Воспользовавшись таким же принципом – интегрированием интегральной величины, Гельмгольц ввел в физику так называемый “векторный потенциал” (5, 13), который затем попал в электродинамику и прочно в ней обосновался. Этот “потенциал” \vec{A} является интегралом интегральной величины: $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ (в одномерном случае $[A] = \int B_x dx$) и определяется с точностью до некой функции, как любой интеграл. При этом “векторный потенциал” будто бы претендует на нахождение ЭДС в разомкнутом элементе проводника ($\vec{E} = -\frac{d\vec{A}}{dt}$), что не соответствует действительности. Решения же на основе “векторного потенциала” совпадают с решениями на основе классической первой формулы из уравнений Максвелла $\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$ и работают только для замкнутого контура ($r_0 - r$). Это можно проиллюстрировать на примере простой задачи – нужно с помощью векторного потенциала найти ЭДС, наведенную в отрезке провода, помещенного на расстоянии r от провода с переменным током. В решении появляется логарифм расстояния r (12), но так как логарифм не имеет размерности, то интеграл превращается в определенный и решение для ЭДС, соответственно, имеет вид $U = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \ln \frac{r_0}{r}$, где r_0 и r - расстояние между проводом с током и проводниками контура. Но так как $r_0 \neq 0$, то ЭДС определяется только в контуре с двумя проводниками, отстоящими от проводника с током на расстояния r_0 и r . **Таким образом, “векторный потенциал” не дает ничего нового по сравнению с классическими формулами Фарадея и Максвелла, а только “упрощает запись”, и, следовательно, является “лишней сущностью”.** Аналогия с лагранжевым действием S напрашивается.

Для любителей интегрировать интегральную величину автор может предложить дальнейшее развитие данной идеи:

Известно, что ускорение это $a = \frac{dV}{dt}$. В то же время $V = \frac{dl}{dt}$. А если предположить,

что есть некая величина ξ , производная по времени от которой является длиной l :

$l = \frac{d\xi}{dt}$? Длина l , соответственно, является производной этой интегральной

величины ξ по времени. Тогда дифференциал ξ определяет длину элемента l и (в трехмерном виде) размерность пространства. Чем этот “подход” хуже векторного потенциала или лагранжева действия S ? Идея-то какая! Это же связь пространства и времени (пространство образуется за счет течения времени)! А теперь

представьте если $\frac{d\xi}{dt} \neq \text{const}$, а меняется со временем. Тогда Вселенная или расширяется или сжимается. А при $\frac{d\xi}{dt} = 0$ вся Вселенная превращается в точку (сингулярность). ОТО тут “лопнет от зависти”. Перспектива-то огромная! Это к вопросу о введении ложных (лишних) сущностей.

7. Заключение

Казалось бы, классическая механика – это полностью сформировавшееся дисциплина и все ее проблемы давно решены. Но иногда при решении конкретных задач возникают проблемы с пониманием поставленной задачи и с ее решением. Это связано с парадоксами, “выплывающими” при решениях некоторых конкретных задач механики. В данной статье автор не собирается ревизовать положения классической механики, но только пытается обратить внимание на ряд парадоксов классической механики, некоторые из которых освещены в данной статье.

8. Литература

1. Б. Яворский, А. Детлаф, Справочник по физике, Москва, 1964
2. М. Г. Иванов, “Безопорные двигатели космических аппаратов”, М.: , Издательство ЛКИ., 2008
3. “Лагранжев”, Википедия,
<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B6%D0%B8%D0%B0%D0%BD>
4. Гамильтонова механика, Википедия,
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%BC%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0
5. Векторный потенциал, Википедия,
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB
6. Центр масс, Википедия,
<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%81%D1%81>
7. А. И. Слободянюк, Физика, Параметрические колебания,
http://www.physbook.ru/index.php/%D0%A1%D0%BB%D0%BE%D0%B1%D0%BE%D0%B4%D1%8F%D0%BD%D1%8E%D0%BA_%D0%90.%D0%98.%D0%A4%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B0_10/17.8
8. Ю. Петрук, Вращательное движение тела,
https://www.syl.ru/article/189925/new_vraschatelnoe-dvijenie-tela-zakon-vraschatelnogo-dvijeniya
9. Гироскоп, Википедия,
<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D1%80%D0%BE%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BF>

10. Центроостремительное ускорение, Википедия,
https://wiki2.org/ru/%D0%A6%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%81%D0%BA%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5
11. Центробежная сила, Википедия, <https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/75204>
12. Андре Анго, «Математика для электро-и радиоинженеров», Наука, 1965
13. Принцип “Бритва Оккама”, <http://neponyatnoe.ru/princip-britva-okkama/>
14. Центробежная сила, http://elementy.ru/trefil/21109/Tsentrobezhnaya_sila
15. Центробежная сила, Википедия,
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%B5%D0%B6%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D0%BB%D0%B0
16. Вращательное движение,
http://znatok.grodno.by/phishics_9/index1_24_files/1.htm
17. Sine integral, <https://keisan.casio.com/exec/system/1180573427>
18. Cosine integral, <https://keisan.casio.com/exec/system/1180573424>