Пифагоровы тройки высших степеней

Владимир Браун

22.07.2022

Пифагоровы тройки – это тройки натуральных чисел a, b, c, таких, что $a^2 + b^2 = c^2$. Тройка называется примитивной если числа a, b и c взаимно просты, то есть, не имеют общих делителей отличных от 1. Все другие тройки получаются из примитивных троек умножением на какой-либо натуральный множитель.

В 1934 году шведский математик Берггрен открыл троичное дерево (граф), корнем которого служит тройка (3, 4, 5), содержащее все примитивные пифагоровы тройки:

$$
(3\quad 4\quad 5)
\begin{cases}
5\quad 12\quad 13 \begin{cases}
7\quad 24\quad 25 \begin{cases} 9\quad 40\quad 41 \\ 105\quad 88\quad 137 \\ 91\quad 60\quad 109 \end{cases} \\
55\quad 48\quad 73 \begin{cases} 105\quad 208\quad 233 \\ 297\quad 304\quad 425 \\ 187\quad 84\quad 205 \end{cases} \\
45\quad 28\quad 53 \begin{cases} 95\quad 168\quad 193 \\ 207\quad 224\quad 305 \\ 117\quad 44\quad 125 \end{cases}
\end{cases} \\
21\quad 20\quad 29 \begin{cases}
39\quad 80\quad 89 \begin{cases} 57\quad 176\quad 185 \\ 377\quad 336\quad 505 \\ 299\quad 180\quad 349 \end{cases} \\
119\quad 120\quad 169 \begin{cases} 217\quad 456\quad 505 \\ 697\quad 696\quad 985 \\ 459\quad 220\quad 509 \end{cases} \\
77\quad 36\quad 85 \begin{cases} 175\quad 288\quad 337 \\ 319\quad 360\quad 481 \\ 165\quad 52\quad 173 \end{cases}
\end{cases} \\
15\quad 8\quad 17 \begin{cases}
33\quad 56\quad 65 \begin{cases} 51\quad 140\quad 149 \\ 275\quad 252\quad 373 \\ 209\quad 120\quad 241 \end{cases} \\
65\quad 72\quad 97 \begin{cases} 115\quad 252\quad 277 \\ 403\quad 396\quad 565 \\ 273\quad 136\quad 305 \end{cases} \\
35\quad 12\quad 37 \begin{cases} 85\quad 132\quad 157 \\ 133\quad 156\quad 205 \\ 63\quad 16\quad 65 \end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
\cdots
$$

В 1963 году датский математик Барнинг, показал, что указанное дерево примитивных пифагоровых троек может быть получено умножением трех матриц:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

на вектор-столбец примитивной тройки, получая для каждой тройки, начиная с корневой тройки (3, 4, 5), три её "потомка":

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix}, \ldots$$

Существование такого троичного дерева примитивных пифагоровых троек являет собой интересный феномен. Все пифагоровы тройки оказываются потомками одной-единственной корневой пифагоровой тройки (3, 4, 5). Не будь её – не было бы и никаких других пифагоровых троек.

Здесь, вероятно, каждому на ум приходит теорема Ферма, утверждающая, что троек натуральных чисел a, b, c, для которых верно равенство $a^n + b^n = c^n$, где n больше двух, не существует. Причину этого можно видеть как раз в том, что для степеней выше двух соответствующей корневой тройки "нет на месте".

А что же есть? Давайте посмотрим.
Посмотрим сначала, что такого особенного в "квадратной" корневой тройке (3, 4, 5). Кроме главного свойства: "сумма квадратов равна квадрату",

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

другим очевидным ей свойством является то, что числа 3, 4, 5 – это последовательные натуральные числа. Других таких пифагоровых троек нет.

Обратимся теперь к рядам последовательных кубов, биквадратов, и других степеней. И здесь мы делаем интересное открытие. Оказывается, последовательные числа 5, 6, 7 образуют почти точную "кубическую пифагорову тройку":

$$\sqrt[3]{5^3 + 6^3} = 6{,}986.$$

Аналогичные равенства верны и для других степеней:

$$\sqrt[4]{7^4 + 8^4} = 8{,}978,$$

$$\sqrt[5]{9^5 + 10^5} = 10{,}973,$$

$$\sqrt[6]{11^6 + 12^6} = 12{,}967,$$

$$\cdots$$

$$\sqrt[100]{199^{100} + 200^{100}} = 200{,}949,$$

$$\cdots$$

$$\sqrt[n]{(2n-1)^n + (2n)^n} \approx 2n + 1.$$

Разность $(2n+1)-\sqrt[n]{(2n-1)^n+(2n)^n}$ хотя и растёт с ростом n, но никогда не превышает значения 0,052:

$$\lim_{n\to\infty}\left((2n+1)-\sqrt[n]{(2n-1)^n+(2n)^n}\right)=2-2\ln\left(e^{\frac{1}{2}}+1\right)=0{,}0518460316\,.$$

Дело оказывается не в том, что корневых троек нет вообще, а в том, что они неточны. Но если корневые тройки высших степеней, хотя и неточные, есть, то, может быть, они тоже образуют троичные деревья?

Приглядимся к "размножающим" матрицам:

$$M_1=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix},\quad M_2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix},\quad M_3=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

Бросается в глаза, что в них много 2-ек. Не связаны ли они со степенью 2?
Если это так, то для 3-ей степени, размножающие матрицы должны быть следующими:

$$M_{31}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 3\\ 3 & -2 & 3\\ 3 & -3 & 4\end{bmatrix},\quad M_{32}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{bmatrix},\quad M_{33}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 3\\ -3 & 2 & 3\\ -3 & 3 & 4\end{bmatrix}.$$

Проверим это предположение:

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 3\\ 3 & -2 & 3\\ 3 & -3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\ 6\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\ 24\\ 25\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\ 6\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}49\\ 48\\ 61\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-2 & 3 & 3\\ -3 & 2 & 3\\ -3 & 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\ 6\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29\\ 18\\ 31\end{bmatrix}.$$

$$\sqrt[3]{13^3+24^3}=25{,}209\approx 25\,,\quad \sqrt[3]{49^3+48^3}=61{,}113\approx 61\,,\quad \sqrt[3]{29^3+18^3}=31{,}148\approx 31\,.$$

Как ни удивительно, но это действительно работает.
Для 4-той степени, размножающие матрицы будут тогда такими:

$$M_{41}=\begin{bmatrix}3 & -4 & 4\\ 4 & -3 & 4\\ 4 & -4 & 5\end{bmatrix},\quad M_{42}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 4\\ 4 & 3 & 4\\ 4 & 4 & 5\end{bmatrix},\quad M_{43}=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 4\\ -4 & 3 & 4\\ -4 & 4 & 5\end{bmatrix}.$$

И так далее.

В общем, мы можем сделать следующее обобщение на произвольную натуральную степень. Для любого натурального показателя степени n, корневая "пифагорова тройка" (в кавычках или без) равна $(2n-1,\, 2n,\, 2n+1)$, а размножающие матрицы равны:

$$M_{n1}=\begin{bmatrix}n-1 & -n & n\\ n & 1-n & n\\ n & -n & n+1\end{bmatrix},\quad M_{n2}=\begin{bmatrix}n-1 & n & n\\ n & n-1 & n\\ n & n & n+1\end{bmatrix},\quad M_{n3}=\begin{bmatrix}1-n & n & n\\ -n & n-1 & n\\ -n & n & n+1\end{bmatrix}.$$

С их помощью, начиная с корневой тройки, для любой натуральной степени n можно построить соответствующее дерево "пифагоровых троек".

В частности, дерево "кубических пифагоровых троек" будет следующим:

$$
\begin{pmatrix}5 & 6 & 7\end{pmatrix}
\left\{\begin{array}{l}
13\quad 24\quad 25\left\{\begin{array}{l}
29\quad 66\quad 67\left\{\begin{array}{lll}61 & 156 & 157\\ 457 & 420 & 553\\ 341 & 246 & 379\end{array}\right.\\
173\quad 162\quad 211\left\{\begin{array}{lll}493 & 828 & 877\\ 1465 & 1476 & 1849\\ 773 & 438 & 811\end{array}\right.\\
121\quad 84\quad 133\left\{\begin{array}{lll}389 & 594 & 643\\ 893 & 930 & 1147\\ 409 & 204 & 421\end{array}\right.
\end{array}\right.\\
49\quad 48\quad 61\left\{\begin{array}{l}
137\quad 234\quad 247\left\{\begin{array}{lll}313 & 684 & 697\\ 1717 & 1620 & 2101\\ 1169 & 798 & 1279\end{array}\right.\\
425\quad 426\quad 535\left\{\begin{array}{lll}1177 & 2028 & 2137\\ 3733 & 3732 & 4693\\ 2033 & 1182 & 2143\end{array}\right.\\
229\quad 132\quad 241\left\{\begin{array}{lll}785 & 1146 & 1255\\ 1577 & 1674 & 2047\\ 661 & 300 & 673\end{array}\right.
\end{array}\right.\\
29\quad 18\quad 31\left\{\begin{array}{l}
97\quad 144\quad 157\left\{\begin{array}{lll}233 & 474 & 487\\ 1097 & 1050 & 1351\\ 709 & 468 & 769\end{array}\right.\\
205\quad 216\quad 265\left\{\begin{array}{lll}557 & 978 & 1027\\ 1853 & 1842 & 2323\\ 1033 & 612 & 1093\end{array}\right.\\
89\quad 42\quad 91\left\{\begin{array}{lll}325 & 456 & 505\\ 577 & 624 & 757\\ 221 & 90 & 223\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\cdots
$$

В пользу сделанного обобщения имеется ещё один сильный аргумент.

Как показал H. Andres Lönnemo, "прародителем" всех пифагоровых троек является тривиальная тройка (1, 0, 1).

С помощью размножающих матриц можно получать не только потомков пифагоровых троек, но и определять их "предков". Действительно, если некоторая тройка получена умножением (слева) предка на какую-то из матриц, то определить этого предка можно разделив (опять слева) тройку на эту матрицу. Проблемой кажется то, что этих матриц три, и для произвольной тройки (взятой не с дерева), мы не знаем, с помощью какой из матриц данная тройка была получена. Удастся ли это определить?

Давайте просто посмотрим на примере, что получится. Возьмём первых потомков корневой пифагоровой тройки (3, 4, 5), т.е. тройки (5, 12, 13), (21, 20, 29), (15, 8, 17), и посмотрим, каким образом в каждом случае найдётся их общий предок.

В матричной арифметике деление производится умножением на обратную матрицу. Обратными для матриц M_1, M_2, M_3 будут матрицы:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad M_3^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Умножим теперь (слева) каждую из троек на каждую из матриц:

$$M_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad M_2^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad M_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix};$$

$$M_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad M_2^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad M_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix};$$

$$M_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad M_2^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad M_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Как видим, настоящего предка даёт только правильная матрица – обратная той, с помощью которой данная тройка была получена. Но и другие матрицы дают почти правильный результат – стоит отбросить знаки, и мы получим настоящего предка. То есть, для определения предка можно использовать любую из обратных матриц, следует лишь отбросить в результате возможные знаки минус.

Давайте определим теперь прародителя кубической корневой тройки (5, 6, 7). Обратными для матриц M_{31}, M_{32}, M_{33} будут матрицы:

$$M_{31}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad M_{32}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad M_{33}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Умножим тройку (5, 6, 7) на любую из них:

$$M_{31}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad M_{32}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad M_{33}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Как видим, это та же тривиальная тройка (1, 0, 1), что и для квадратной корневой тройки. Тот же результат получим и для любой другой степени.

То есть, тривиальная тройка (1, 0, 1) является прародителем, "LUCA", вообще всех пифагоровых троек, как настоящих, так и "пифагоровых троек" высших степеней. Поэтому, для построения троичного дерева "пифагоровых троек" (в кавычках или нет) нам не нужно знать корневую тройку. В любом случае можно начать с тройки (1, 0, 1). Первым её потомком будет только одна новая тройка – корневая.

Примеры для степеней 1, 2, 3, 4:

$$1.\quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$2.\quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$3.\quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$4.\quad \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -4 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В заключение, простейшее троичное дерево "пифагоровых троек", для первой степени, или попросту натуральных чисел:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{lll} 1 & 4 & 5 \quad \left\{ \begin{array}{lll} 1 & 6 & 7 \\ 9 & 6 & 15 \\ 9 & 4 & 13 \end{array} \right. \\ \\ 5 & 4 & 9 \quad \left\{ \begin{array}{lll} 5 & 14 & 19 \\ 13 & 14 & 27 \\ 13 & 4 & 17 \end{array} \right. \quad \cdots \\ \\ 5 & 2 & 7 \quad \left\{ \begin{array}{lll} 5 & 12 & 17 \\ 9 & 12 & 21 \\ 9 & 2 & 11 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Эти тройки, сохраняя свойство "сумма степеней равна степени", потеряли свойство примитивности – тройки (9, 6, 15) и (9, 12, 21) сократимы.

Ссылка:

H. Andres Lönnemo. The Trinary Tree(s) underlying Primitive Pythagorean Triples