Вокруг додекаэдра

Владимир Браун

14.09.2024

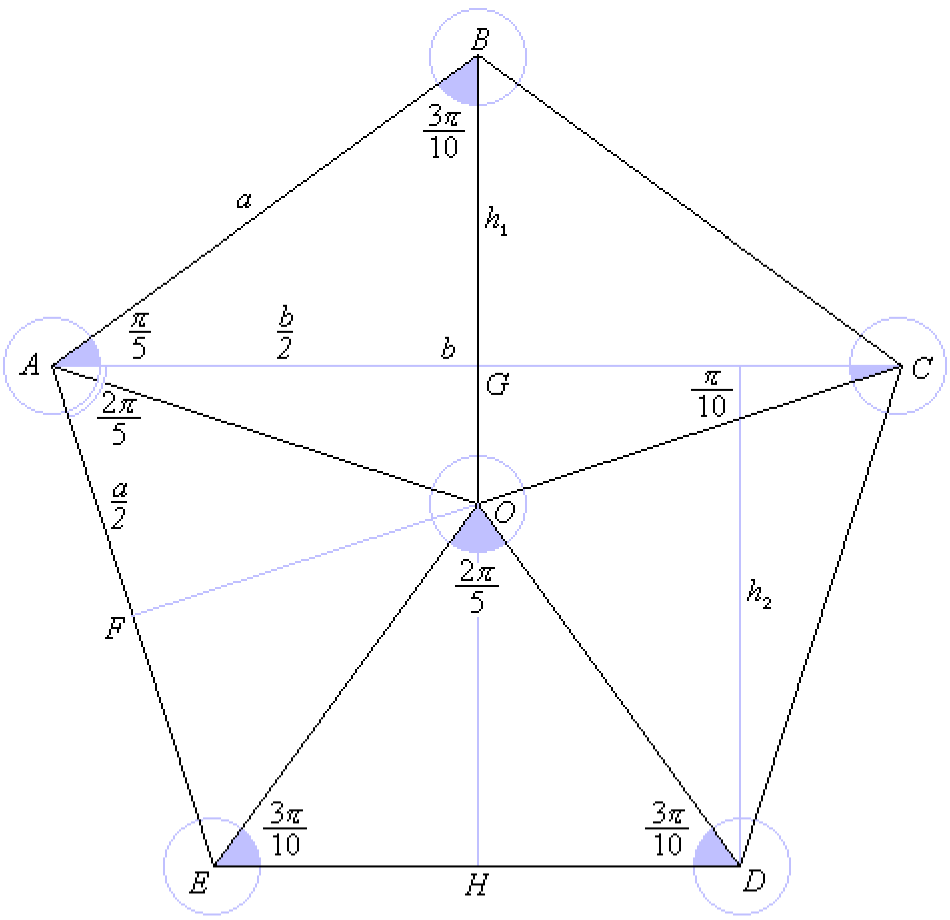
Додекаэдр – выпуклый правильный двенадцатигранник с пятиугольными гранями – пожалуй, самый красивый среди пяти платоновых тел: тетраэдра, гексаэдра (куба), октаэдра, додекаэдра и икосаэдра. Изучая додекаэдр можно подметить интересные математические соотношения. С некоторыми из них я хочу вас здесь познакомить.

1. Cos 36°

Ещё со школы нам знакомы точные значения тригонометрических функций sin, cos, tg для некоторых избранных углов – значения в радикалах для углов π/6, π/4, π/3:

$$\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Используя соотношения, которыми связаны элементы правильного пятиугольника, оказывается возможным найти в радикалах значения тригонометрических функций для недостающего в ряду π/6, π/4, π/3 угла π/5.



Итак, из треугольников ABG и ACF имеем для диагонали пятиугольника b два, существенно разных, выражения:

$$b = a\,2\cos\frac{\pi}{5} \quad \text{и} \quad b = a\frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{5}}.$$

Приравняв правые части выражений, получим следующее равенство:

$$2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{5}}. \tag{1}$$

Используя известное выражение для косинуса двойного угла, cos2x = 2cos²x – 1, имеем:

$$2\cos\frac{2\pi}{5} = \left(2\cos\frac{\pi}{5}\right)^2 - 2.$$

Подставив это значение в уравнение (1) и обозначив $2\cos\frac{\pi}{5} = x$, получим уравнение:

$$x = \frac{1}{x^2 - 2}. \tag{2}$$

Избавившись от знаменателя, получим:

$$x^3 - 2x - 1 = 0, \tag{3}$$

или, выделив множитель $(x + 1)$:

$$(x + 1)(x^2 - x - 1) = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) распадается на два: $x + 1 = 0$ и

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{5}$$

Корень первого уравнения, -1, отрицателен и, следовательно, нас не устраивает. Уравнение (5) уже интересней – его положительный корень

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{6}$$

и есть искомое значение. Величина (6) хорошо известна в математике – это так называемое «золотое отношение» («золотая пропорция», «золотое сечение»), обычно она обозначается греческой буквой тау, τ. Величина

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{τ1}$$

обладает многими замечательными свойствами, вытекающими из уравнения (5) и оказывающимися весьма удобными в вычислениях с τ. Вот лишь некоторые из них:

$$\tau^2 = \tau + 1, \quad \tau = \sqrt{\tau + 1}, \quad \frac{1}{\tau} = \tau - 1, \quad \tau = 1 + \frac{1}{\tau}. \tag{τ2}$$

Итак, решив уравнение (1) имеем:

$$2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{7}$$

то есть,

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}. \tag{8}$$

Отсюда, используя известные соотношения между тригонометрическими функциями, уже нетрудно получить следующую таблицу значений:

	$\frac{\pi}{10} = 18°$	$\frac{\pi}{5} = 36°$	$\frac{3\pi}{10} = 54°$	$\frac{2\pi}{5} = 72°$
sin	$\frac{\tau-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{3-\tau}}{2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\tau}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{\tau+2}}{2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$
cos	$\frac{\sqrt{\tau+2}}{2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\tau}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{3-\tau}}{2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\tau-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
tg	$\frac{\tau-1}{\sqrt{\tau+2}} = \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{3-\tau}}{\tau} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\tau}{\sqrt{3-\tau}} = \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\tau\sqrt{\tau+2} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$

Попутно мы получили выражение для диагонали b:

$$b = a\tau, \tag{b1}$$

$$\frac{b}{a} = \tau. \tag{b2}$$

Заметим также, что диагональ правильного пятиугольника производит «золотое сечение» перпендикулярной к ней высоты:

$$\frac{HG}{GB} = \frac{h_2}{h_1} = \tau. \tag{h1}$$

Действительно:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \sqrt{\frac{\tau+2}{3-\tau}} = \tau.$$

Последнее равенство в цепочке неочевидно. Но оно легко доказывается с использованием свойств (τ2).

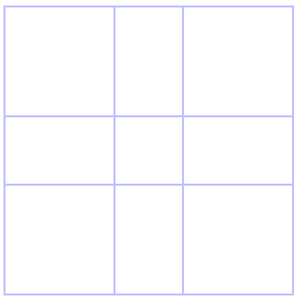
2. Построение додекаэдра

Здесь я хочу предложить вам способ точного построения додекаэдра в растровой графике, например в Paint'e. Ясно, что абсолютно точно построить что-либо непрямоугольное на точках возможно лишь в исключительных случаях. Достижимая точность будет зависеть от разрешения растра. Разумеется, именно такая точность и подразумевается здесь. С другой стороны, в построении додекаэдра нет, конечно, ничего особенно сложного, нужно просто знать размеры, углы... Вот тут то и возникает трудность... Я же хочу предложить вам способ, при котором о додекаэдре не нужно знать практически ничего.

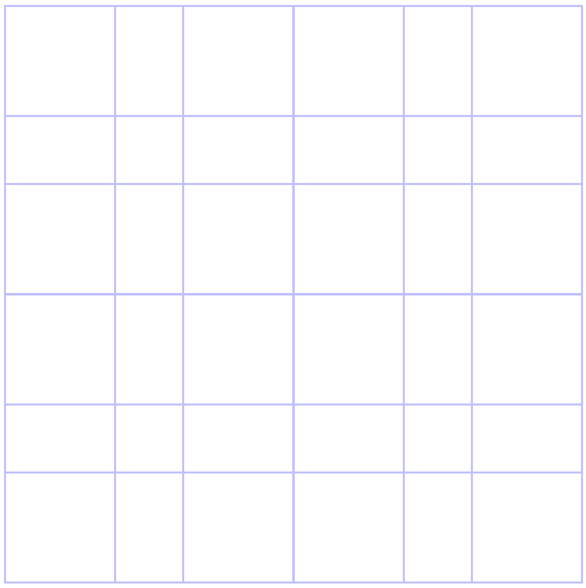
Начинается всё с ряда чисел Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ... Если у вас нет этого ряда под рукой, то вы можете просто получить его сами. Первые два члена ряда: 1, 1, а каждый следующий член ряда получается суммированием двух предыдущих: 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, и т. д. Как далеко строить ряд? Это зависит от предполагаемого размера додекаэдра.

Итак, имея отрезок ряда чисел Фибоначчи, выбираете три последовательных числа, например: 55, 89, 144, с учётом, что большее из этих чисел является половиной размера будущего додекаэдра – это и есть ответ на вопрос о том, как много чисел ряда надо иметь.

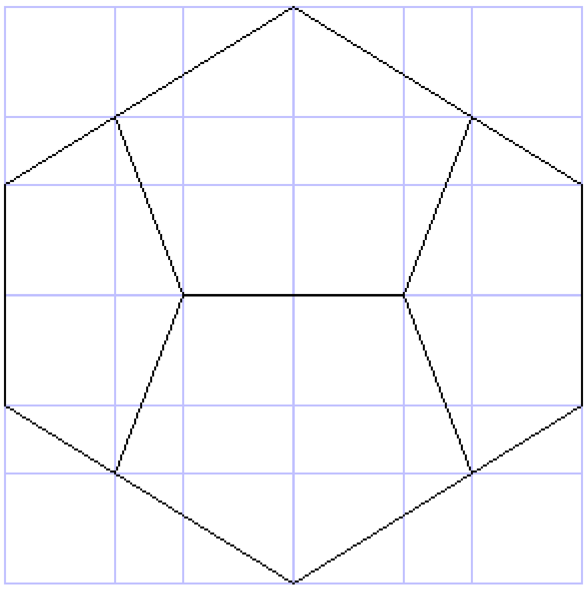
Теперь, проведя линии $x = 0$, $x = 55$, $x = 89$, $x = 144$, и $y = 0$, $y = 55$, $y = 89$, $y = 144$, постройте фигуру (1). Затем, путём копирования учетверите этот квадрат, образовав фигуру (2). Осталось только соединить некоторые узлы получившейся решётки, так, как это показано на рисунке (3). И всё. Додекаэдр готов. Причём с наилучшей, для данного размера и данного растра, точностью. Замечу, что точность эта растёт с увеличением размера додекаэдра. Например, для тройки 89, 144, 233 погрешность составляет всего около 0,01 пикселя.



(1)



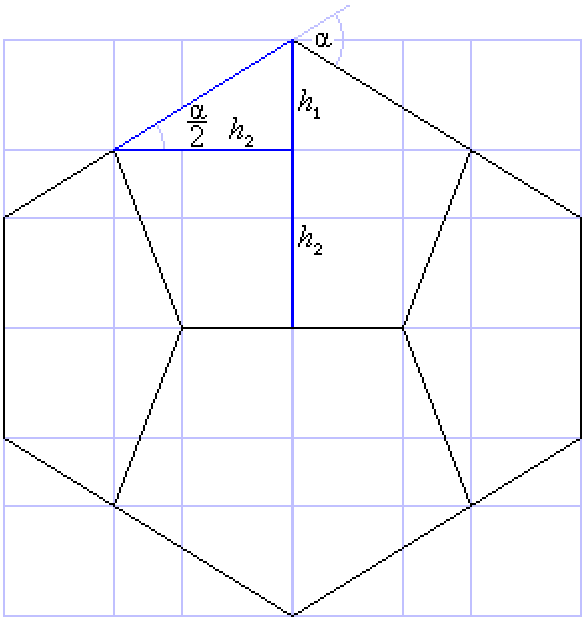
(2)



(3)

3. Arctg 2

Несколько раз в интернете мне встречался вопрос об угле arctg 2. Либо в виде проблемы: «доказать, что острый угол между гранями додекаэдра равен arctg 2», либо в виде вопроса: «существует ли короткое построение, ведущее к доказательству этого утверждения». Здесь я хочу продемонстрировать, что удачные чертежи способствуют появлению хороших идей и догадок. В частности, приведенный выше чертёж додекаэдра позволяет получить очень короткое доказательство утверждения об arctg 2.



Легко заметить, что отрезки обозначенные через h_2 равны – каждый из них равен половине диагонали пятиугольника. Поскольку соотношение (h1) для отрезков высоты будет верно и для проекций этих отрезков, то имеем:

$$\frac{h_2}{h_1} = \tau\,. \tag{1}$$

то есть,

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \tau\,,\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\tau} = \tau - 1\,. \tag{2}$$

Используя известную формулу для тангенса двойного угла, найдём:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\tau - \tau + 1} = 2\,, \tag{3}$$

и, следовательно:

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2 \tag{4}$$

4. «Золотые» кубы

Глядя на чертёж из предыдущей части возникает догадка, что отрезок h_1 равен $a/2$. Вообще говоря, это так и есть по построению, но это ещё не доказывает, что это так на самом деле. Доказать это однако не трудно:

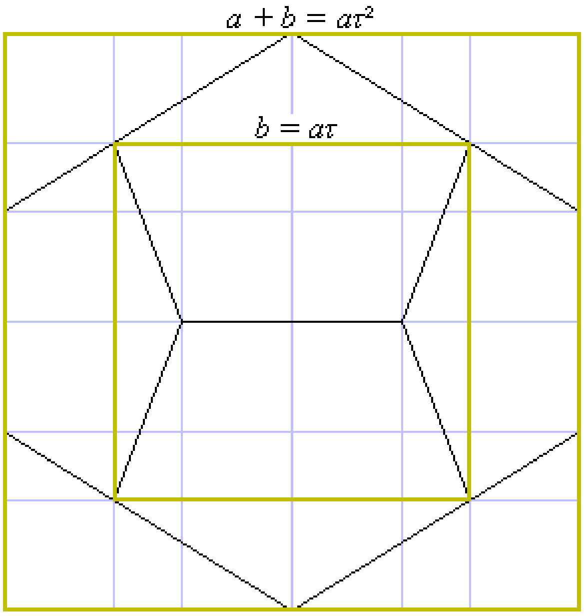
$$\frac{h_2}{h_1} = \tau = \frac{b}{a}. \qquad (1)$$

Или, поскольку $h_2 = b/2$, то:

$$\frac{b}{2h_1} = \frac{b}{a}. \qquad (2)$$

$$h_1 = \frac{a}{2}. \qquad (3)$$

Отсюда следует, что размер квадрата, в который вписан чертёж додекаэдра, равен $a + b = a + a\tau = a(1 + \tau) = a\tau^2$.
Указанный квадрат можно представить как проекцию куба, в который додекаэдр вписан или, если угодно, помещён внутрь, как в коробку. Вспомнив о существовании вписанного куба с размерами $b = a\tau$, получаем пару кубов с общим центром, между которыми расположен додекаэдр, отношение размеров которых равно «золотому отношению», τ:

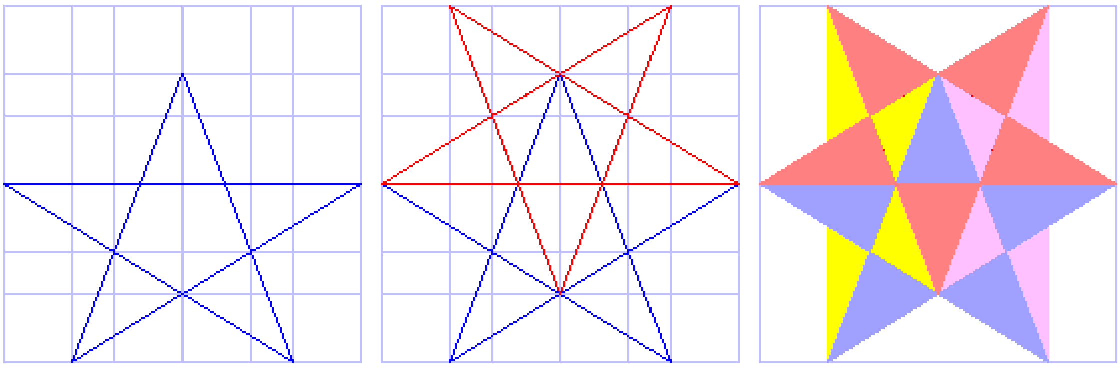


5. Звездчатые формы додекаэдра

Решётка, построенная на тройке фибоначчиевых чисел, назовём её «фибоначчиева решётка», обладает замечательным свойством – она оказывается пригодной не только для построения додекаэдра, но и для построения всех трёх его звёздчатых форм: *малого звёздчатого додекаэдра*, *большого додекаэдра* и *большого звёздчатого додекаэдра*.

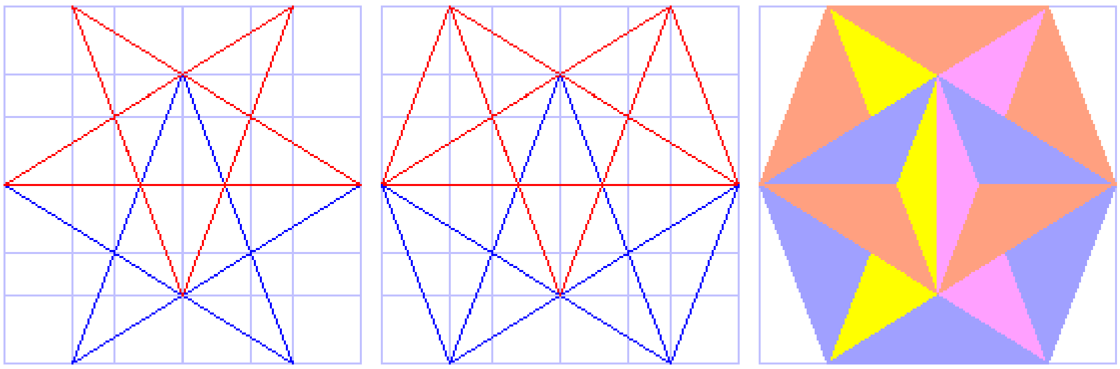
1. Малый звёздчатый додекаэдр

Вначале всего стоит уже известная нам решётка, например (34, 55, 89). Начинается построение *малого звёздчатого додекаэдра* со звезды, показанной на рисунке.
Затем нужно начертить ещё один экземпляр этой звезды, зеркально симметричный относительно горизонтальной оси решётки. Если присовокупить к этим двум звёздам ещё две вертикальные линии решётки, соединяющие ножки звёзд, то можно считать чертёж готовым. Правда, за всеми этими линиями трудно разглядеть саму звёздчатую форму. Тут должно помочь раскрашивание.



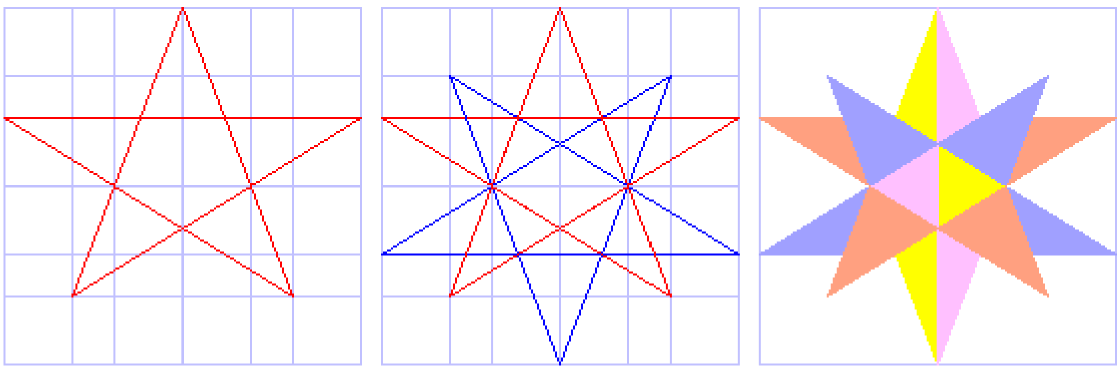
2. Большой додекаэдр

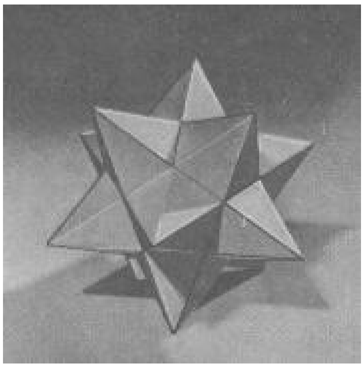
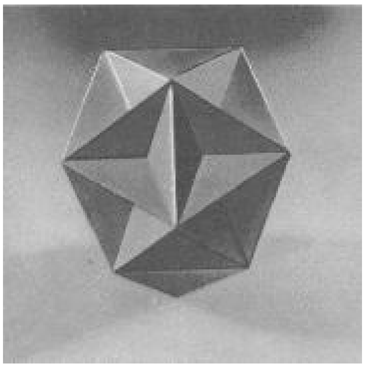
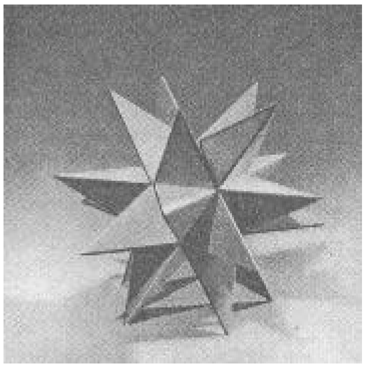
Чертёж *большого додекаэдра* лишь немногим отличается от чертежа *малого звёздчатого додекаэдра* – добавляются лишь линии, соединяющие вершины лучей. Правильно понять же его опять поможет раскраска.



3. Большой звёздчатый додекаэдр

Процедура построения *большого звёздчатого додекаэдра* очень похожа на таковую для *малого звёздчатого додекаэдра* – построение начинается со звезды той же самой формы, но располагается она на этот раз в верхней части решётки. Далее, как и прежде, добавляется звезда, зеркально отображённая относительно горизонтальной оси решётки. Всё – чертёж готов. Проблема только в том, чтобы правильно представить себе, что же изображено на этом чертеже. Тут, как и раньше, поможет раскраска.



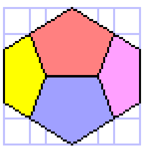




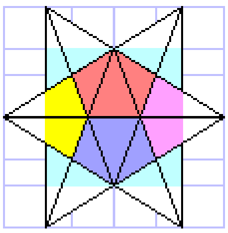
Замечание. В первых двух случаях решётка может быть упрощена – линии, соответствующие среднему числу «фибоначчиевой тройки», т.е. числу 55 в случае (34, 55, 89), для построения не нужны. Однако я оставил их – для общности и для демонстрации, насколько органична решётка для каждой из представленных моделей – пересечения линий чертежа всегда точно совпадают с узлами решётки.

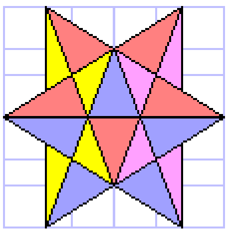
6. Размеры звездчатых форм додекаэдра

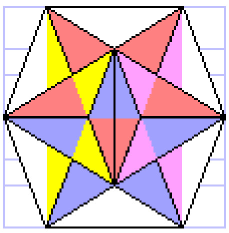
Звёздчатые формы образуются путём продолжения граней додекаэдра и присоединения к нему полученных таким образом отсеков пространства. Не только всех за раз, но и путём присоединения отсеков лишь определённого типа. Таким образом, размеры звёздчатых форм зависят от типа присоединённых отсеков и, следовательно, могут различаться, и, определённо, должны быть больше исходного додекаэдра.
Из предыдущих примеров этого не видно – все формы построены на основе одной и той же решётки и имеют в этом смысле одинаковый размер. Это лишь подтверждает, что для построения и додекаэдра и его форм подходят решётки любого размера, но ничто пока не говорит об истинном соотношении размеров звёздчатых форм, между собой и с величиной исходного додекаэдра. Для прояснения вопроса об относительных размерах додекаэдра и его звёздчатых форм произведём построение форм менее формально, т.е. естественным образом – путём продолжения граней додекаэдра.

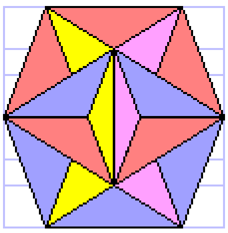
Возьмём за основу решётку (13, 21, 34) и построим в ней додекаэдр – рисунок (1). Чтобы иметь возможность продолжения граней (на чертеже – это линии пересечения граней, т.е. рёбра додекаэдра), расширим исходную решётку на один шаг ряда Фибоначчи, т.е. возьмём решётку (21, 34, 55) и поместим исходную решётку с додекаэдром в её центр. Продолжим теперь линии рёбер до пересечения. Таким образом мы присоединим к каждой грани додекаэдра отсек пространства в виде пирамиды с пятиугольным основанием, равным грани додекаэдра, и получим *первую звёздчатую форму додекаэдра* – малый звёздчатый додекаэдр – рисунок (2). После окраски продолжения граней цветами, соответствующими окраске исходного додекаэдра, *малый звёздчатый додекаэдр* будет выглядеть, как на рисунке (3).


(1)

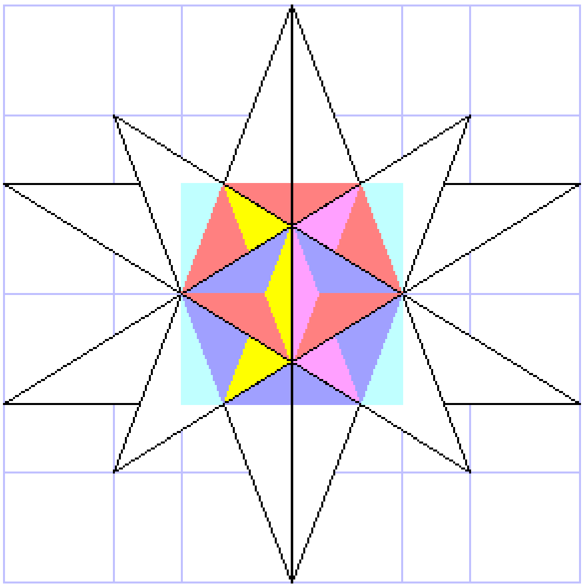

(2)


(3)

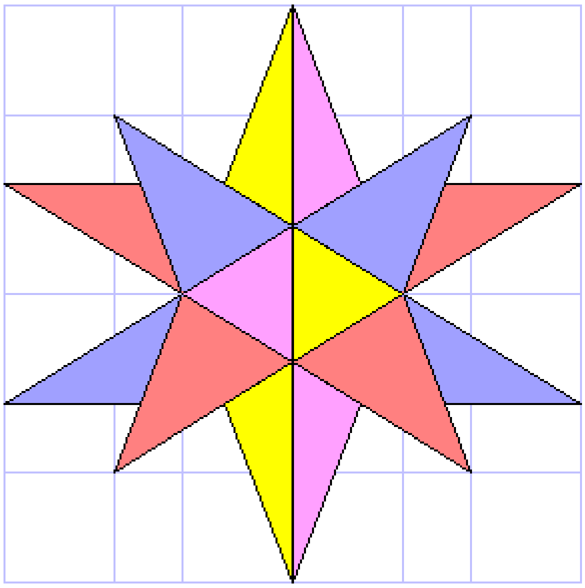

(4)


(5)

Вторую звёздчатую форму – большой додекаэдр – можно построить на той же решётке (21, 34, 55) исходя из чертежа предыдущей формы (3). Для присоединения новых отсеков пространства соединим линиями вершины лучей малого звёздчатого додекаэдра. Таким образом мы присоединим к нему 30 клинообразных отсеков пространства – рисунок (4). После окраски, соответствующей окраске исходного додекаэдра, *большой додекаэдр* примет вид, показанный на рисунке (5).



(6)



(7)

Для построения *третьей звёздчатой формы* – большого звёздчатого додекаэдра – требуется новое расширение решётки. На этот раз одного шага расширения оказывается уже недостаточно – требуется два шага, т.е. решётка (55, 89, 144). Поместим решётку предыдущей формы (21, 34, 55) вместе с самой формой (5), в центр новой решётки и продолжим рёбра большого додекаэдра до пересечения. Таким образом мы присоединим к большому додекаэдру 20 отсеков в виде пятиугольных бипирамид – рисунок (6). После соответствующей окраски, *большой звёздчатый додекаэдр* предстанет в виде, показанном на рисунке (7).

Сопоставим теперь размеры додекаэдра и его звёздчатых форм. Додекаэдр мы построили на решётке (13, 21, 34), т.е. его размер (ребро «ящика», в который мы его поместили) равен 34 · 2 = 68. Малый звёздчатый додекаэдр и большой додекаэдр – решётка (21, 34, 55), размер 55 · 2 = 110. Большой звёздчатый додекаэдр – решётка (55, 89, 144), размер 144 · 2 = 288.
Таким образом, размеры додекаэдра и его форм относятся как 68 : 110 : 110 : 288, или как 34 : 55 : 55 : 144, или, в общем случае, как $F_n : F_n + 1 : F_n + 1 : F_n + 3$, где F_n есть n-ое число Фибоначчи.

Замечу, что сказанное касается лишь наших «точных» чертежей додекаэдра и его звёздчатых форм. Для истинных геометрических тел это соотношение является лишь приближённым. С другой стороны, известно, что отношение соседних чисел Фибоначчи стремится к «золотому отношению», τ, при стремлении n к бесконечности. Это позволяет догадаться, что истинное отношение размеров додекаэдра и его звёздчатых форм есть $1 : \tau : \tau : \tau^3$.

7. Crosscube

«Crosscube – вращательная головоломка, реализованная в виртуальном пространстве. Головоломка представляет собой модификацию всемирно известного оригинала – кубика Рубика, но модификацию довольно парадоксальную – куб тоже рассечён тремя парами секущих плоскостей, как и кубик Рубика, но идущих не параллельно, а накрест. В итоге головоломка радикально отличается от кубика Рубика».

На самом деле, никакого парадокса тут, конечно, нет, и возможно вы уже и сами догадались о происхождении Crosscube. Если нет, то открою вам маленький секрет: возможностью своего существования Crosscube обязан додекаэдру.

Как мы видели в разделе «золотые кубы», додекаэдр, кроме прочего, обладает кубической симметрией – в додекаэдр можно вписать куб подходящего размера, так чтобы все его вершины совпали с вершинами додекаэдра. Crosscube и есть такой куб, вписанный в додекаэдр и рассечённый плоскостями, проходящими через центр додекаэдра перпендикулярно его осям симметрии 5-го порядка, т.е. параллельно граням додекаэдра. Поэтому и оказываются возможными произвольные повороты любых слоёв, половин, этого куба, до повторного совпадения сечений, аналогично тому, как это происходит при вращении слоёв кубика Рубика.

Программа Crosscube написана мной много лет назад. С тех пор сменилось не одно поколение компьютерного «железа», и на новое «железо» программа уже не встаёт. Но возможность поиграть с Crosscube всё ещё существует. Кроме старого «железа», нужное окружение можно создать на виртуальной машине, Oracle VM VirtualBox, на которой нужно установить: 3D-ускорение, IDE жёсткий диск, Windows 32-Bit, Direct3D, dx8vb.dll. Хотите попробовать? – пишите, я вышлю вам экземпляр программы.

Интересная ссылка

Красивые виртуальные модели звездчатых форм додекаэдра и других платоновых тел, а также неисчислимое множество других многогранников и звездчатых форм, можно увидеть на этом удивительном сайте:

Звёздчатые многогранники. Трехмерные модели многогранников и звездчатых форм.