Диагонали правильных многоугольников в радикалах

часть 3

Владимир Браун

25.03.2025

В данной части мы ставим задачу записать диагонали правильного 51-, 85- и 255-угольника в радикалах с помощью первой формулы длины диагонали – через отношения синусов. Задача сводится к получению этих синусов в радикалах.

Начнём с определения синусов углов кратных π/17 и π/34. Проще всего получить их из косинусов этих углов с помощью формул приведения,

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \alpha = \frac{i\pi}{17},\ i = 1, 2, ..., 8:$$

$$\sin\frac{\pi}{17} = \cos\frac{15\pi}{34}, \qquad \sin\frac{15\pi}{34} = \cos\frac{\pi}{17},$$

$$\sin\frac{2\pi}{17} = \cos\frac{13\pi}{34}, \qquad \sin\frac{13\pi}{34} = \cos\frac{2\pi}{17},$$

$$\sin\frac{3\pi}{17} = \cos\frac{11\pi}{34}, \qquad \sin\frac{11\pi}{34} = \cos\frac{3\pi}{17},$$

$$\sin\frac{4\pi}{17} = \cos\frac{9\pi}{34}, \qquad \sin\frac{9\pi}{34} = \cos\frac{4\pi}{17},$$

$$\sin\frac{5\pi}{17} = \cos\frac{7\pi}{34}, \qquad \sin\frac{7\pi}{34} = \cos\frac{5\pi}{17},$$

$$\sin\frac{6\pi}{17} = \cos\frac{5\pi}{34}, \qquad \sin\frac{5\pi}{34} = \cos\frac{6\pi}{17},$$

$$\sin\frac{7\pi}{17} = \cos\frac{3\pi}{34}, \qquad \sin\frac{3\pi}{34} = \cos\frac{7\pi}{17},$$

$$\sin\frac{8\pi}{17} = \cos\frac{\pi}{34}, \qquad \sin\frac{\pi}{34} = \cos\frac{8\pi}{17}.$$

Косинусы углов *i*π/17 в радикалах приведены в первой части статьи, а косинусы углов *i*π/34 получаются из них по формуле косинуса половинного угла,

$$\cos\frac{i\pi}{34} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos\frac{i\pi}{17}}.$$

Синусы углов *i*π/51, равно как и другие, можно было бы получить из косинусов этих углов из основного тождества, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, или из формулы $\sin^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, но это требует извлечения квадратного корня и приводит к увеличению вложенности радикалов, поэтому мы определим их по-другому.

Правильный 51-угольник.

Нетрудно доказать тождества:

$$\sin\frac{i\pi}{51} = -\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{i\pi}{51}\right)+\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{i\pi}{51}\right),$$

$$\sin\frac{i\pi}{51} = +\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{i\pi}{51}\right)-\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{i\pi}{51}\right).$$

Подставляя в первое и второе соответственно для параметра i значения:

$$i = 3m + 1,\ \ m = 0, 1, 2, ..., 8,$$

$$i = 3m + 2,\ \ m = 0, 1, 2, ..., 7,$$

получим для синусов углов $i\pi/51$, где $i = 1, 2, ..., 25$ и $i/51$ несократимо, представление:

$$\sin\frac{i\pi}{51} = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{j\pi}{17}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{l\pi}{34},$$

в котором параметры j и l принимают следующие значения:

i	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	19	20	22	23	25
j	11	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6	5	1	4	2	3
l	5	27	3	25	1	23	1	21	3	19	5	7	15	9	13	11

Заменяя в нём вхождения синусов и косинусов их радикальными выражениями, получаем искомые радикальные выражения синусов углов $i\pi/51$. Например, для синуса угла $\pi/51$ мы имеем для входящих синусов и косинусов выражения:

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \ \cos\frac{11\pi}{17}=\frac{1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}{16},$$

$$\cos\frac{5\pi}{34}=\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos\frac{5\pi}{17}},\ \ \cos\frac{5\pi}{17}=\frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}{16}.$$

В итоге, после подстановки получаем выражение:

$$\sin\frac{\pi}{51}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}{16}+$$
$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}+2\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}}{8}.$$

Аналогично:

$$\sin\frac{25\pi}{51}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}{16}+$$
$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}}{8}.$$

Правильный 85-угольник.

Для синусов углов $i\pi/85$, где $i = 1, 2, ..., 42$ и $i/85$ несократимо, аналогичное представление распадается на две группы:

$$\sin\frac{i\pi}{85} = \sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{j\pi}{17} + \sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{l\pi}{34},$$

$$\sin\frac{i\pi}{85} = \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{p\pi}{17} + \sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{q\pi}{34},$$

в которых параметры j и l, и p и q принимают следующие значения:

i	1	4	6	9	11	14	16	19	21	24	26	29	31	36	39	41
j	10	6	9	5	8	4	7	3	6	2	5	1	4	3	1	2
l	3	29	1	27	1	25	3	23	5	21	7	19	9	11	15	13

i	2	3	7	8	12	13	18	22	23	27	28	32	33	37	38	42
p	3	13	2	12	1	11	10	1	9	2	8	3	7	4	6	5
q	23	9	21	7	19	5	3	15	1	13	1	11	3	9	5	7

Заменяя в нём вхождения синусов и косинусов их радикальными выражениями, получаем искомые радикальные выражения синусов углов $i\pi/85$.

Например, для первых четырёх синусов получим выражения:

$$\sin\frac{\pi}{85} = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}{16}+$$
$$\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}+2\sqrt{34+2\sqrt{17}}+4\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}}{8},$$

$$\sin\frac{2\pi}{85} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}{16}-$$
$$\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}}{8},$$

$$\sin\frac{3\pi}{85} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}{16}+$$
$$\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+4\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}}{8},$$

$$\sin\frac{4\pi}{85} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}{16}-$$
$$\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}+2\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}}{8}.$$

Правильный 255-угольник.

Для синусов углов $i\pi/255$, где $i = 1, 2, ..., 127$ и $i/255$ несократимо, аналогичное представление состоит из четырёх групп:

$$\sin\frac{i\pi}{255} = \sin\frac{7\pi}{15}\cos\frac{j\pi}{17} + \sin\frac{\pi}{30}\cos\frac{l\pi}{34},$$

$$\sin\frac{i\pi}{255} = \sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{p\pi}{17} + \sin\frac{13\pi}{30}\cos\frac{q\pi}{34},$$

$$\sin\frac{i\pi}{255} = \sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{r\pi}{17} + \sin\frac{11\pi}{30}\cos\frac{s\pi}{34},$$

$$\sin\frac{i\pi}{255} = \sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{u\pi}{17} + \sin\frac{7\pi}{30}\cos\frac{v\pi}{34},$$

в которых параметры j и l; p и q; r и s; u и v принимают следующие значения:

i	1	14	16	29	31	44	46	59	61	74	76	89	91	104	106	121
j	9	7	8	6	7	5	6	4	5	3	4	2	3	1	2	1
l	1	31	1	29	3	27	5	25	7	23	9	21	11	19	13	15

i	2	13	28	32	43	47	58	62	73	77	88	92	103	107	118	122
p	1	15	14	1	13	2	12	3	11	4	10	5	9	6	8	7
q	19	13	11	15	9	13	7	11	5	9	3	7	1	5	1	3

i	4	11	19	26	41	49	56	64	71	79	86	94	101	109	116	124
r	2	14	1	13	12	1	11	2	10	3	9	4	8	5	7	6
s	21	11	19	9	7	15	5	13	3	11	1	9	1	7	3	5

i	7	8	22	23	37	38	52	53	67	82	83	97	98	112	113	127
u	12	4	11	3	10	2	9	1	8	7	1	6	2	5	3	4
v	7	25	5	23	3	21	1	19	1	3	15	5	13	7	11	9

Заменяя в нём вхождения синусов и косинусов их радикальными выражениями, получаем искомые радикальные выражения синусов углов $i\pi/255$. Например, для первых четырёх синусов получим выражения

$$\sin\frac{\pi}{255} = -\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8} + \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{8}\right)\frac{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}{16} +$$
$$\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8} - \frac{\sqrt{5}+1}{8}\right)\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+4\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}}{8},$$

$$\sin\frac{2\pi}{255} = \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8} - \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}\right)\frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}{16} -$$
$$\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8} + \frac{\sqrt{5}-1}{8}\right)\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}}{8},$$

$$\sin\frac{4}{255}=-\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}-\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{8}\right)\frac{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}{16}-$$
$$\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}+\frac{\sqrt{5}+1}{8}\right)\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}}{8},$$

$$\sin\frac{7\pi}{255}=-\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}+\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}\right)\frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}{16}+$$
$$\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}-\frac{\sqrt{5}-1}{8}\right)\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}+4\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}}{8}.$$

Получив выражения нужных синусов, мы можем теперь воспользоваться формулой

$$d_i=\frac{\sin\frac{(i+1)\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}},\ i=1,2,...,n-3,$$

(напомню, что сторону многоугольника мы положили равной 1) и записывать длины диагоналей единообразно, а для диагоналей с большими номерами и более компактно, чем при использовании рекуррентной формулы, но теряя при этом нормализованную (без радикалов в знаменателе) форму результата последней. Запишем для примера этим способом первые и последние диагонали рассматриваемых многоугольников.

Правильный 51-угольник, $k=24$.

$$d_1=\frac{\left(\begin{array}{l}\sqrt{3}\left(1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}\right)-\\ 2\sqrt{34+2\sqrt{17}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}+4\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l}\sqrt{3}\left(1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}\right)+\\ 2\sqrt{34+2\sqrt{17}+2\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}\end{array}\right)},$$

$$d_{24}=\frac{\left(\begin{array}{l}\sqrt{3}\left(1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}\right)+\\ 2\sqrt{34+2\sqrt{17}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l}\sqrt{3}\left(1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}\right)+\\ 2\sqrt{34+2\sqrt{17}+2\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}\end{array}\right)}.$$

Правильный 85-угольник, $k = 41$.

$$d_1 = \frac{\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}\right) - 2\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{34+2\sqrt{17}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}-4\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}\right)}{\left(2\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{34+2\sqrt{17}+2\sqrt{34+2\sqrt{17}}+4\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}\right)\right)},$$

$$d_{41} = \frac{\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}\right) + 2\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{34+2\sqrt{17}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}+4\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}\right)}{\left(2\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{34+2\sqrt{17}+2\sqrt{34+2\sqrt{17}}+4\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}\right)\right)}.$$

Правильный 255-угольник, $k = 126$.

$$d_1 = \frac{\left(\left(\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right) - 2\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}\right)}{\left(2\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+4\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}}} - \left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right)\right)},$$

$$d_{126} = \frac{\left(\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right) + 2\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+4\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}\right)}{\left(2\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+4\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}}} - \left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right)\right)}.$$